И.И. Баврин

Библиотека учителя математики

СБОРНИК ЗАДАЧ и занимательных упражнений по МАТЕМАТИКЕ

5–9 классы

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС

Библиотека учителя математики

И.И. Баврин

СБОРНИК ЗАДАЧ и занимательных упражнений по МАТЕМАТИКЕ

5–9 классы

Москва
ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ВЛАДОС
2013

УДК 51(075.3)(076.1)
ББК 22.1я72-43
Б13

Бaврин, Иван Иванович

Б13 Сборник задач и занимательных упражнений по математике, 5–9 классы / И.И. Баврин. — М. : Гуманитарный изд. центр ВЛАДОС, 2013. — 236 с. (Библиотека учителя математики).

ISBN 978-5-691-01906-7.

Агентство CIP РГБ.

Учебное пособие содержит богатую коллекцию старинных занимательных задач, начиная с устного счета и заканчивая задачами науки о случайном.

В книгу включены исторические комментарии к текстам ряда задач, а также забавные истории из жизни известных ученых — авторов приведенных задач.

УДК 51(075.3)(076.1)
ББК 22.1я72-43

ISBN 978-5-691-01906-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге пять глав. Первая глава, посвященная устному счету, включает 100 избранных задач выдающегося мастера по устному счету и решению задач С. А. Рачинского. Вторая и третья главы содержат 200 занимательных задач известных ученых прошлых веков, в том числе и задачи науки о случайном (глава III). В четвертой главе рассмотрены забавные эпизоды из жизни этих ученых.

Глава V содержит ответы, указания и решения.

Задачи С. А. Рачинского доступны учащимся начальной школы.

Задачи глав II и III расположены в хронологической последовательности. Сориентироваться, достаточно ли у учащегося знаний для решения той или иной задачи глав II и III, поможет следующее распределение задач по классам.

5 класс: 130, 141, 173, 206, 224;

6 класс: 101, 103, 108, 111, 115, 117, 121, 122, 132, 149, 171, 174, 175, 216, 219, 225, 227, 228, 231, 232, 248;

7 класс: 107, 110, 116, 120, 124, 137, 138, 151, 159–161, 172, 176, 196, 200, 229, 230, 236, 237, 247, 269–276, 281, 282, 284, 289, 291, 297, 298;

8 класс: 112, 118, 123, 126, 129, 133, 140, 142, 146, 150, 152, 165, 177, 178, 182, 183, 218, 220, 242, 244;

9 класс: 102, 104–106, 113, 119, 125, 127, 131, 134, 136, 139, 143–145, 148, 153, 156, 157, 162, 164, 166–168, 170, 180, 181, 187, 188, 195, 197, 201, 207–212, 221, 222, 234, 235, 238–240, 246;

Остальные задачи II и III глав адресованы ученикам 9-х классов — будущим учащимся 10-х и 11-х классов.

10 класс: 114, 147, 154, 155, 169, 179, 184, 189–192, 202, 205, 217, 233, 241, 249–268, 277–280, 283, 285–288, 290, 292–296, 299, 300;

11 класс: 109, 128, 135, 158, 163, 185, 186, 193, 194, 198, 199, 203, 204, 213–215, 223, 226, 243, 245.

Тематика многих задач выходит за рамки школьной программы, поэтому в книге (см. приложения) помещен справочный материал о метрической системе мер (в ряде задач главы I используются старинные русские меры), о цепных дробях, числах Фибоначчи, об элементах комбинаторики и теории вероятностей.

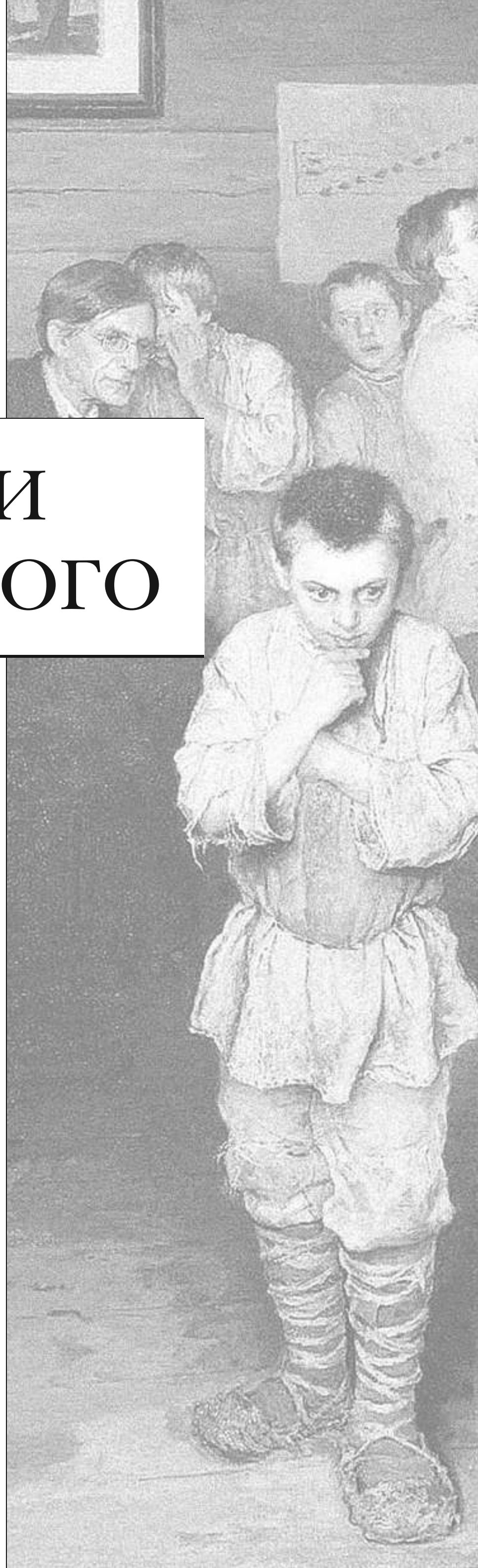
Подробное изложение решения некоторых задач, а также сведения по истории математики можно найти в [30]; [31]; [32]; [112] (и дополнительно в [14]; [15]; [21]; [42]; [48]; [49]; [50]; [51]; [52]; [53]; [57]; [64]; [66]; [67]; [73]; [75]; [79]; [88]; [92]; [97]; [107]; [108]; [116]) из списка литературы.

I

ЗАДАЧИ РАЧИНСКОГО

$+13^2+14^2$

365



Средство для здоровой умственной гимнастики.

С. А. Рачинский

Великий реформатор школы швейцарский педагог Генрих Песталоцци (1746–1827) полагал, что целью школьного обучения должно быть умственное и нравственное совершенствование ребенка, развитие духовных сил учащихся. Арифметика, по мнению Песталоцци, более других предметов способствует достижению этих целей, поэтому он предоставил ей одно из главных мест в курсе начальной школы. В обучении же арифметике на первое место Песталоцци поставил устный счет.

Владение навыками устного счета в сочетании со знанием искусственных приемов сокращенных вычислений дает возможность учащимся выбрать в каждом отдельном случае наиболее рациональные и эффективные пути вычислений, что приводит не только к дополнительному выигрышу времени при устном счете, но и к облегчению выполнения письменного и полуписьменного счета. Устный счет развивает у детей инициативу, сообразительность, изобретательность, внимание, память, мышление, прививает любовь и интерес к математике.

Нельзя не отметить, что отдельные приемы сокращенных вычислений, применяемых при устном счете, могут явиться дополнительным средством для закрепления у учащихся некоторых арифметических знаний и алгебраических формул (он способствует пониманию основных законов четырех арифметических действий и т. д.). Неоспоримо большое значение имеет устный счет и в повседневной практической деятельности человека.

Для того чтобы учащиеся лучше осознали необходимость устных вычислений, чтобы у них не зародилась мысль, что устный счет нужен только для устного счета, а не для практических применений в жизни, необходимо практиковать устные вычисления не только как таковые, но и при решении задач.

Рачинский

Выдающимся мастером по устному счету и решению задач был известный русский педагог Сергей Александрович Рачинский (1833–1902), чье оригинальное издание «1001 задача для умственного счета»[1] явилось прекрасной иллюстрацией применения устного счета при решении задач.

Задачник Рачинского, воспроизведенный в книге автора [3], интересен для нас в двух отношениях. Прежде всего, он является демонстрацией того, до какой виртуозности доходили ученики Рачинского в устных вычислениях, легко справляясь с большими и далеко не всегда удобными числами; во-вторых, он показывает, на каком высоком уровне развито было математическое мышление у детей, ибо среди задач есть немало таких, которые вообще считаются для начальной школы трудными. Здесь есть задачи на сложное тройное правило, на части, на движение, задачи типа «галки-палки» и другие. Среди них много задач практического характера, задач о тогдашней сельской жизни.

[1] С. А. Рачинский. «1001 задача для умственного счета». – СПб., 1899. 3-е изд.; 1-е изд. вышло в 1891 г.

ЗАДАЧИ РАЧИНСКОГО

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

Выражение

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365},$$

которое составляет одну из задач Рачинского, запечатлено на картине «Устный счет» замечательного русского художника Николая Петровича Богданова-Бельского (1868—1945), ученика Рачинского, хранящейся в Третьяковской галерее в Москве.

На картине изображен урок устного решения этой задачи (решить ее можно быстро, если догадаться что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$) в школе Татево Смоленской губернии. Эту школу основал и в ней преподавал бывший профессор Московского университета С. А. Рачинский.

Ниже приводятся 100 избранных задач из задачника С. А. Рачинского «1001 задача для умственного счета» (номер в скобках соответствует номеру задачи в книге С. А. Рачинского).

Большинство этих задач используют старые русские меры. Поэтому прежде, чем переходить к задачам Рачинского, следует кратко ознакомиться с приведенной метрической системой (см. приложение I).

Как и в задачнике С. А. Рачинского, словом «год» обозначается год простой, т. е. в 365 дней, под словом «февраль» имеется в

Устный счет

виду этот месяц в году не високосном, год включает 52 недели. Иногда вместо слова «четверик» употребляется более распространенное в крестьянской среде в период выхода в свет задачника С. А. Рачинского слово «мера». Предполагается, что в стопе бумаги 480 листов.

Ко всем задачам имеются ответы (см. гл. V).

1 **(26).** Сколько в пуде лотов? Сколько в нем золотников?

2 **(482).** Копеечная свеча весит 1 лот 1 золотник. Сколько весят 600 свечей?

3 **(10).** Сколько вершков в 375 аршинах?

4 **(13).** Купец купил за 150 р. 120 аршин сукна. Сколько стоит аршин?

5 **(14).** Некто тратит 40 к. в день. Сколько он тратит в год?

6 **(15).** На 10 р. куплено 31 фунт пряников по 18 к. и 34 фунта орехов. Сколько стоит фунт орехов?

7 **(17).** Некто поехал в город и взял с собою 3 р. Прожил он в городе неделю и задолжал 1 к. Сколько он тратил в день?

8 **(25).** Сколько минут в сутках, в неделе?

9 **(29).** Сколько в одном году (не високосном) часов?

10 **(37).** Из трех стоп бумаги сделано 36 равных книг. Сколько листов в каждой?

11 **(50).** Я за 12 р. купил 8 фунтов кофе и 4 фунта чаю. Чай втрое дороже, чем кофе. Сколько стоит фунт того и другого?

12 **(328).** От школы до церкви 25 сажень. Червячок проползает 5 дюймов в минуту. За сколько времени доползет он от школы до церкви?

13 **(67).** Купец покупал пуд сахару по 6 р., а продавал фунт — по 17 к. В один месяц он на сахаре получил прибыли 20 р. Сколько пудов сахару он купил и продал?

14 **(71).** Лавочник купил пуд пряников за 4 р. В фунте пряников 14, и он продает их по копейке. Но он дал двум сыновьям по 18 пряников, а 24 пряника у него съели мыши. Сколько он получит барыша с этого пуда пряников?

15 **(74).** Куплено 18 дюжин стульев по 30 р. дюжина. За провоз заплачено 8 р. Затем каждый стул продан по 3 р. Сколько барыша?

16 **(91).** Я разделил 18 яблок между мальчиками, и каждому досталось $2^1/_4$ яблока. Сколько было мальчиков?

17 **(567).** Лист золотой бумаги стоит $2^1/_2$ к. Сколько стоит стопа такой бумаги?

18 **(95).** Между двумя городами 600 верст. Двое вышли из них одновременно друг другу навстречу и встретились через 15 дней в 240 верстах от одного из городов. Сколько верст в день проходил каждый?

19 **(102).** За 2 р. 21 к. я купил кушак, картуз и шапку. Каждая вещь втрое дороже предыдущей. Цены?

20 **(113).** Рассыльный при волости каждую неделю ходит в город, за 65 верст. Сколько верст он проходит в год?

21 **(115).** Я разделил между своими детьми 10 р., и каждому досталось по полтиннику, четвертаку (25 к.), двугривенному (20 к.), пятиалтынному (15 к.), гривеннику и пятачку. Сколько у меня детей?

22 **(125).** От дворца до собора 36 саженей. Для царского выхода на этом протяжении постланы ковры длиною каждый в 1 сажень 3 фута 6 дюймов. Сколько ковров?

23 **(132).** Улитка проползает 25 саженей в 1 ч 12 мин. За какое время проползет она версту?

24 **(139).** Машина изготовляет по листу бумаги в минуту. Сколько стоп она изготовит в неделю?

25 **(141).** У разносчика спросили, сколько у него яблок. Он отвечал: если к моим яблокам прибавить половину их числа, да еще 10, будет 100. Сколько у него яблок?

26 **(150).** Поденщик тратит на себя 20 к. в день, а за каждый рабочий день получает 50 к. К концу года у него накопилось 71 р. Сколько дней он работал?

27 **(156).** Поезд проезжает версту за 1 мин 30 с. За какое время может он проехать 1000 верст?

28 **(163).** Сколько печеного хлеба выйдет из 1 пуда муки, если из 1 фунта муки выходит 1 фунт 12 золотников хлеба?

29 **(166).** Сажень телеграфной проволоки весит 24 лота. Что будет весить такая проволока длиною в версту?

30 **(168).** Из 6 фунтов серебра сделаны стаканчики, каждый в 5 лотов 1 золотник. Сколько стаканчиков?

31 **(171).** По железной дороге уложены рельсы длиною каждый в 2 сажени 1 аршин 8 вершков. Сколько таких рельсов уложится в 1 версту?

32 (902). Серебряный крест весит 10 лотов. Чистого серебра в нем 8 лотов 1 золотник. Какой пробы серебро?

33 (185). На 32 лошади вышло 5 четвертей овса. Сколько на каждую?

34 (192). Я отправляю по почте по 80 писем (в 1 лист) в месяц. Сколько почтовой бумаги трачу я в год?

35 (195). Сколько кур можно прокормить в год 9 четвертями овса, если каждая съедает в месяц по 3 гарнца?

36 (208). У меня 108 р. 3-, 5- и 10-рублевыми бумажками поровну. Сколько бумажек каждой ценности?

37 (222). Два писца берутся переписать 180 листов: один в 36 дней, другой в 45. За сколько дней перепишут они их вместе?

38 (229). Нанят работник за 108 р. в год. Через 15 месяцев его рассчитали и дали ему 115 р. и платье. Сколько стоит платье?

39 (231). В 4 корзинках 21, 22, 23 и 24 яблока, сколько нужно прибавить к каждой, чтобы во всех было 100 и в каждой поровну?

40 (529). Колокольня имеет высоту 40 аршин. В нижнем ярусе столько аршин, сколько в верхнем футов. Сколько аршин в том и другом?

41 (237). Мальчик за 5 недель до ярмарки стал откладывать деньги. В первую неделю он отложил 4 коп., а затем каждую неделю откладывал вдвое больше, чем в предыдущую. На отложенные деньги он купил пряник, азбуку и картуз. Всякая вещь в 5 раз дороже предыдущей. Цены?

42 (247). Торговец купил 2 головы сахару, одну в 17, другую в 19 фунтов, и за обе заплатил 5 р. 40 к. Почем должен он продавать фунт этого сахара, чтобы на нем получить 1 р. 80 к. барыша?

43 (248). Торговец смешал 7 фунтов чаю по 2 р., 6 фунтов по 2 р. 50 к. и 5 фунтов по 4 р. Почем должен он продавать фунт смешанного чаю, чтобы получить барыша 23 р.?

44 (254). Сколько ударов в сутки бьют часы, бьющие половины (одним ударом)?

45 **(908).** От деревни до города 63 версты. Из деревни в 3 ч утра вышел пешеход и шел по $3^1/_2$ версты в час. Вслед за ним вышел из той же деревни другой пешеход и, идя по $4^1/_2$ версты в час, нагнал первого в самом городе. Когда вышел второй пешеход?

46 **(262).** У меня в погребе всегда горит лампа. В ней в 15 мин сгорает золотник керосина. Сколько керосина сгорает в сутки?

47 **(765).** В неугасимую лампаду входит 1 фунт масла и выгорает он в 3 сут 1 ч. Сколько масла выходит в год?

48 **(276).** На простое письмо наклеивается 1 марка, на заказное – 2. Я отправил 18 писем и наклеил 25 марок. Сколько было писем простых? Сколько заказных?

49 **(281).** Я сею на десятину по 7 мер 4 гарнца ржи. Сколько пойдет ржи на 12 десятин?

50 **(282).** 7 рабочих за 4 дня вырыли канаву в 168 саженей. Сколько нужно рабочих, чтобы за 5 дней вырыть канаву в 120 саженей?

51 **(288).** Одного старика спросили, как велика его семья. Он ответил: нас 2 брата; у меня 6 сыновей, и у каждого по 6 мальчиков; а у брата 7 сыновей, и у каждого по 7 девочек. Сколько человек в этой семье?

52 **(705).** Медник из 25 фунтов меди сделал самовар, подсвечник и крест. В самоваре столько фунтов, сколько в подсвечнике лотов и в кресте золотников. Вес этих вещей?

53 **(296).** Двум братьям досталось 240 р. Если младший из своей части отдаст старшему 25 р., то у старшего будет вдвое больше, чем у младшего. Сколько досталось каждому?

54 **(299).** В школе равное число девочек и мальчиков. Я принес 234 ореха, и каждому мальчику досталось по 5, каждой девочке по 4 ореха. Но девочки обиделись, и в другой раз я принес столько орехов, что всем досталось по 6. Сколько орехов я принес?

55 **(523).** Медник сделал 2 дюжины подсвечников, весом каждый в 20 лотов, и сотню крестиков, весом каждый в 8 лотов. Сколько пошло меди?

56 **(315).** Я купил за 75 к. меру яблок. Дюжину этих яблок я продавал по 7 к. и получил 37 к. барыша. Сколько яблок было в мере?

57 **(317).** Нужно перевезти 64 куля ржи, весом каждый в 7 пудов 20 фунтов. На подводу кладется по 15 пудов. Сколько нужно подвод?

58 **(319).** Некто каждую неделю ездит в город, отстоящий от его дома на 63 версты. Сколько верст проездит он в год?

59 **(756).** Путь от дворца до собора при Высочайших выходах устилается коврами. Если устлать его коврами в 8 аршин длины, пойдет двумя коврами больше, чем если устлать его коврами в 9 аршин. Сколько саженей от дворца до собора?

60 **(326).** В пекарне каждую минуту выпекают по калачу и завертывают его в лист бумаги. Сколько бумаги выходит в сутки?

61 **(336).** Я провел год в деревне, в Москве и в дороге — и притом в Москве в 8 раз больше времени, чем в дороге, а в деревне в 8 раз больше, чем в Москве. Сколько дней провел я в дороге, в Москве и в деревне?

62 **(338).** Машина печатает в минуту 5 листов. Сколько в сутки?

63 **(364).** Два брата-близнеца дожили до 72 лет. Один всегда спал по 8 часов в сутки, другой по 6. Сколько лет проспал каждый?

64 **(377).** На карауле сменяют часового через 7 часов. Сколько караульных сменилось в неделю?

65 **(384).** Ваня от дома до школы делает 1200 шагов. Шаг его — аршин. Учебных дней в зиму — 150. Сколько верст делает он в зиму, ходя в школу?

66 **(418).** Пуд свечей стоит 8 р. В фунте 4 свечи. Что будет стоить освещение дома в феврале, если каждый вечер сгорает 6 свечей?

67 **(430).** У меня вдвое больше денег, чем у брата. Если же он мне из своих денег отдаст рубль, у меня будет втрое больше денег, чем у него. Сколько денег у каждого из нас?

68 **(903).** Золотой крестик весит 2 лота. Чистого золота в нем 4 золотника 48 долей. Какой пробы золото?

69 **(448).** В году 150 учебных дней, но по субботам мы умственных задач не решаем. Сколько мне нужно запасти задач на год, если каждая из двух старших групп решает по 8 задач в вечер?

70 **(488).** Окружность колеса — 1 аршин 14 вершков. Сколько раз обернется оно на протяжении версты?

71 **(496).** Некто мерил дорогу шестом длиною в 1 сажень 1 фут 4 дюйма. Сколько раз приложил он шест к дороге на протяжении версты?

72 **(539).** Выстроена каменная стена вышиною в 5 саженей. Каждый камень вышиною в 15 дюймов. Сколько пошло рядов камней?

73 **(532).** Дочь ткет по 3 аршина в день, 4 дня она ткала одна, но затем стала ткать и мать, которая ткет по 5 аршин в день. Когда их тканья стало поровну, они прекратили работу. Сколько соткали они вдвоем?

74 **(558).** Из ведра молока выходит 80 золотников масла. Сколько масла выйдет из 48 ведер?

75 **(576).** В воскресенье в 8 ч вечера выехали друг другу навстречу 2 поезда из двух городов, отстоящих один от другого на 603 версты. Один проезжает в час 38 верст, другой 29 верст. Когда они встретятся?

76 **(620).** Началась война. Из Петербурга через каждые 18 мин отправляется поезд из 25 вагонов, и в каждом вагоне сидит по 50 солдат. Сколько солдат выедет из Петербурга в течение суток?

77 **(637).** В 4 дня я поймал 120 мух, каждый день столько, сколько в предыдущие вместе. Сколько каждый день?

78 **(677).** Собака увидала зайца за версту и бросилась за ним. Заяц пробегает в час 30 верст, собака 36. Через сколько времени собака догонит зайца?

79 **(717).** У меня 2 улья. В апреле пчелы каждого улья собрали по 2 фунта меда. В каждый из следующих 3 месяцев пчелы первого улья собрали вдвое, а пчелы второго вчетверо больше, чем в предыдущий. Сколько меду оказалось в обоих ульях к 1 августа?

80 **(630).** От нас до Иерусалима 3100 верст. Отправился туда богомолец и прошел столько сажень пешком, сколько аршин проехал по железной дороге и сколько футов на пароходе. Сколько верст он сделал каждым из этих способов?

81 **(945).** В колоколе 770 пудов. В нем столько лотов меди, сколько золотников олова и долей серебра. Сколько пудов каждого металла?

82 **(740).** Если к моим деньгам прибавить 4 р., у меня будет столько же, сколько у моего брата. Если к моим деньгам прибавить 55 р., у меня будет вчетверо больше, чем у брата. Сколько денег у каждого?

83 **(751).** За 1000 р. я купил 44 коровы по 18 и 26 р. Сколько тех и других?

84 **(785).** Из пуда серебра сделаны 4 дюжины подсвечников. Сколько стоит каждый, если золотник серебра стоит 27 к., и за работу каждого подсвечника берут 3 р. 40 к.?

85 **(808).** Стояли березы, летели галки. На каждую березу село по галке, и осталось 5 галок. Потом на каждую березу село по 2 галки, и осталось 5 берез без галок. Сколько галок, сколько берез?

86 **(809).** Старший брат сказал младшему: «Дай мне 8 орехов, тогда у меня орехов будет вдвое больше, чем у тебя». А младший сказал старшему: «Ты дай мне 8 орехов, тогда у нас будет поровну». Сколько орехов у каждого?

87 **(819).** Из Москвы в Тверь выехали одновременно 2 поезда. Первый проходил в час 39 верст и прибыл в Тверь двумя часами раньше второго, который проходил в час 26 верст. Сколько верст от Москвы до Твери?

88 **(830).** Я всем своим ученикам роздал орехов поровну. Четверо из них съели по 12 орехов, и тогда у этих четверых вместе осталось столько орехов, сколько получил от меня каждый из них. По сколько орехов я раздавал?

89 **(838).** У меня 5 человек детей. Дал я им пряников поровну. Трое из них съели по 5 пряников, и тогда у всех троих осталось столько пряников, сколько у двух остальных. Сколько всех пряников роздано?

90 **(846).** В течение февраля горело у меня 5 ламп, по 6 ч в день. Фунт керосину выгорает в 14 ч. На сколько выгорало у меня керосину, если пуд его стоит 2 р.?

91 **(851).** Переднее колесо делает 19 оборотов, пока заднее делает их 13. Заднее колесо сделало 624 оборота. Сколько сделало переднее?

92 **(900).** Поползли друг другу навстречу из школы червяк, а из бани жук. Пока червяк проползает дюйм, жук проползает вершок. На каком расстоянии от школы они встретятся, если от школы до бани 33 сажени?

93 **(874).** Я купил столько коробок с мылом, сколько было кусков в коробке. Сестра купила тремя коробками меньше, чем я, но в каждой было тремя кусками больше, чем в купленных мною. У кого больше кусков?

94 **(875).** Два мальчика играли в шашки. Через несколько минут на доске оказалось пустых клеток втрое больше, чем занятых шашками, а у одного мальчика двумя шашками больше, чем у другого. Сколько осталось у каждого?

95 **(880).** Некто работает 273 дня в году и тратит на себя в день 60 к., а откладывает в год 600 р. Сколько он получает за рабочий день?

96 **(883).** В будущем (1892) году думаю провести в Петербурге столько минут, сколько часов проведу в деревне. Сколько времени проведу я в Петербурге?

97 **(895).** Летом у меня целые сутки было открыто окно. В первый час влетел 1 комар, во второй 2, в третий 3 и т. д. Сколько комаров налетело в сутки?

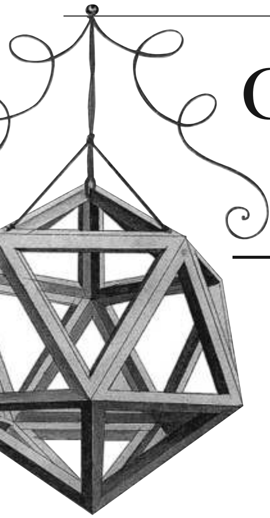
98 **(891).** Мне нужно переписать тетрадку. Я мог бы переписать ее в 2 дня, Ефрем в 3 дня, а Семен в 6 дней. Во сколько времени перепишем мы ее втроем?

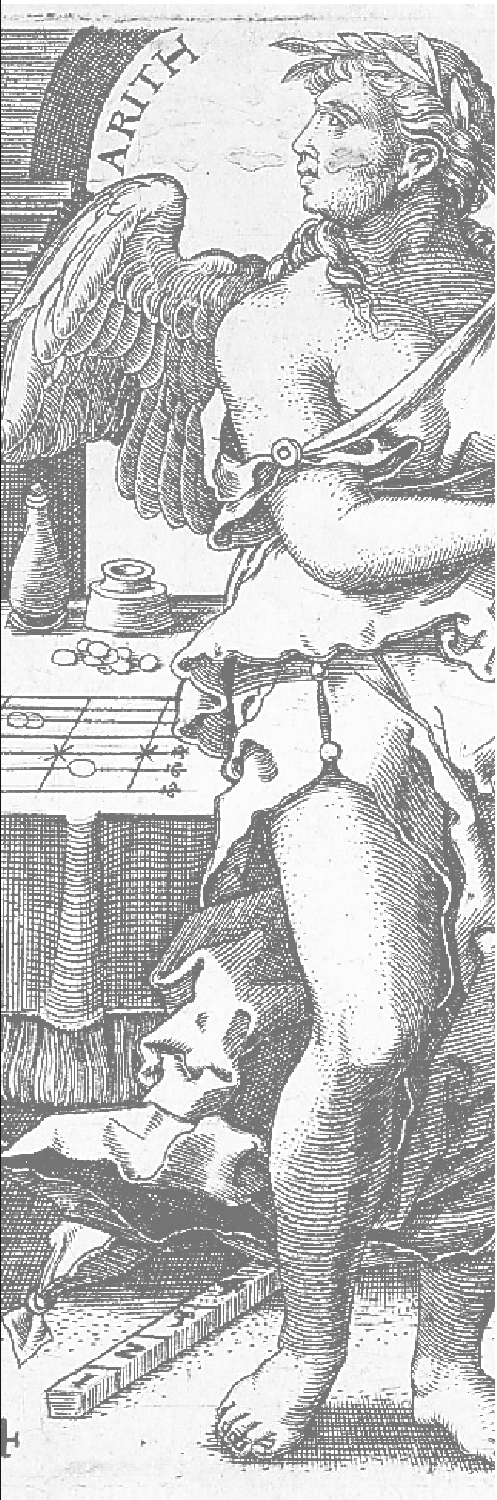
99 **(892).** Сколько ударов пробили часы (бьющие половины одним ударом) в течение февраля 1892 года?

100 **(918).** Бамбук (китайский тростник) вырос в течение февраля на 4 сажени. На сколько вырастал он в каждый час?

II

СТАРИННЫЕ ЗАДАЧИ





О, сколько нам открытий чудных...

А. С. Пушкин

ДРЕВНИЙ ЕГИПЕТ

Наставление, как достигнуть знания всех темных (трудных) вещей... всех тайн, которые скрывают в себе вещи... писец Ахмес написал это со старых рукописей...

Сохранившаяся часть заглавия папируса Ахмеса

Наиболее древние письменные математические тексты датируются примерно началом II тыс. до н. э. Математические документы сохранились только в Египте, Вавилоне, Китае и Индии.

Около пяти тысяч лет назад при фараоне Джосере был признан богом мудрости великий врачеватель, государственный деятель и первый известный нам по имени математик Имхотеп. Математические правила, нужные для земледелия, астрономии и строительных работ, древние египтяне записывали на стенах храмов или на папирусах. Еще 4 тыс. лет назад они решали практические задачи по арифметике, алгебре и геометрии, причем в арифметике пользовались не только целыми числами, но и дробями. Высшим достижением египетской математики является точное вычисление объема усеченной пирамиды с квадратным основанием.

Задачи из папируса Ахмеса

Самый большой сохранившийся до наших дней древнеегипетский математический текст — это так называемый папирус писца Ахмеса (XVIII–XVII вв. до н. э.) (рис. 1). Папирус имеет размер 5,25 м × 33 см и содержит 84 задачи. Папирус был приобретен в 1858 г. Г. Райндом и изучен впервые профессором А. Эйзенлором в 1877 г.

Другой папирус (5,44 м × 8 см) включает 25 задач. Он был приобретен русским востоковедом В. С. Голенищевым в 1893 г. и в настоящее время принадлежит Московскому музею изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Московский папирус исследовали ученые — академики Б. А. Тураев и В. В. Струве.

Рис. 1

101. У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?

102. Наставление, как определять разности. Тебе сказано: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между количеством хлеба у каждого человека и ему предшествующего составляет $\frac{1}{8}$ меры.

103. Найти приближенное значение для числа π, приняв площадь круга равной площади квадрата со стороной $\frac{8}{9}$ диаметра круга.

Как появилось число π? Если число, выражающее длину окружности, разделить на число, выражающее диаметр этой окружности, то получим для числа $\pi = 3{,}14159265358979...$.

Вавилоняне во II тыс. до н. э. удовлетворялись значением $\pi = 3$.

Древнегреческий ученый Архимед (ок. 287—212 до н. э.), рассматривая отношения периметров вписанных и описанных многоугольников с числом сторон 6, 12, 24, 48, 96 к диаметру, нашел

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

В V в. китайский математик и астроном Цзу Чун-чжи (ок. 430 — ок. 501) нашел

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots .$$

Нидерландский математик Лудольф ван Цейлен (1540–1610) вычислил 35 десятичных знаков после запятой у числа π.

В течение 20 лет (с 1853 по 1873 г.) английский математик У. Шенкс вычислил 707 десятичных знаков числа π, допустив ошибку на 528-м знаке. По просьбе Шенкса эти цифры были изображены на его надгробии.

В 1766 г. немецкий математик, астроном, физик и философ И. Г. Ламберт доказал иррациональность числа π. В 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман доказал трансцендентность числа π.

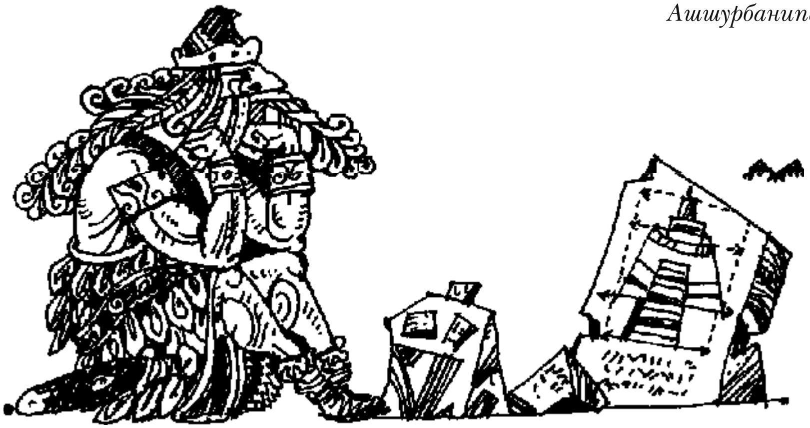
В наше время вычисление большого числа цифровых знаков числа π служит для проверки эффективности современных суперкомпьютеров и их программного обеспечения. Например, в 1989 г. японский ученый Я. Канэда, используя суперкомпьютер фирмы «Хитачи» лишь около шести часов, получил для числа π 201 326 000 цифровых знаков после запятой.

Много интересных данных о числе π, можно найти в книге [70].

ВАВИЛОН

Я совершаю запутаннейшие деления и умножения...

Ашшурбанипал



В Древнем Вавилоне математика зародилась задолго до нашей эры. Вавилонские памятники в виде глиняных плиток (всего около 500 000, причем из них примерно лишь 150 с текстами математических задач и 200 с числовыми таблицами) с клинописными надписями хранятся в различных музеях мира (рис. 2). Расшифровкой и анализом клинописных текстов много занимались историки-математики О. Нейгебауэр (1899–1990) и Ф. Тюро-Данжен (1872–1944).

Рис. 2

В этих текстах мы находим достаточно удобные способы решения ряда практических задач, связанных с земледелием, строительством и торговлей. Вавилоняне были основоположниками астрономии, создали шестидесятеричную систему счисления, решали уравнения второй степени и некоторые виды уравнений третьей степени при помощи специальных таблиц. Документальным свидетельством высокой вычислительной культуры служит и высказывание ассирийского царя Ашшурбанипала (VII в. до н. э.): «Я совершаю запутаннейшие деления и умножения...»

Задача на глиняной табличке (*ок.* 1950 *до н. э.*)

104. Площадь A, состоящая из суммы площадей двух квадратов, составляет 1000. Сторона одного из квадратов составляет уменьшенные на 10 две трети стороны другого квадрата. Каковы стороны квадратов?

Задача о вычислении числа π

105. За длину окружности вавилоняне принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π, которым пользовались вавилоняне.

Задача о шесте

106. Найти длину шеста, сначала вертикально прислоненного к стене, затем смещенного так, что его верхний конец опустился на 3 локтя, причем нижний конец отступил от стены на 9 локтей.

Задача о делении прямого угла

107. Разделить прямой угол на три равные части.

ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ

Если ты это найдешь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты все до конца превзошел.

Заключительные строки задачи Архимеда о быках Солнца

Если от математики Древнего Востока до нас дошли отдельные задачи с решениями и таблицы, то в Древней Греции рождается наука математика, основанная на строгих доказательствах. Этот важнейший скачок в истории науки относится к VI—V вв. до н. э.

Задача «Суд Париса»

Один из древнейших мифов содержит сказание о суде троянского царевича Париса...

Однажды на свадьбе богиня раздора Эрида подбросила собравшимся гостям яблоко с надписью «прекраснейшей». Из-за этого яблока возник спор между богиней мудрости и справедливой войны Афиной, богиней любви и красоты Афродитой и сестрой и супругой Зевса Герой. Они обратились к царю и отцу богов и людей Зевсу, чтобы он решил, кому должно достаться яблоко. Зевс отправил богинь на гору к Парису, который пас там свои стада. Парис должен был решить, какая из богинь самая прекрасная. Каждая из богинь старалась склонить юношу на свою сторону:

Афина предлагала ему мудрость и военную славу, Афродита — красивейшую женщину на земле в жены, Гера — власть и богатство.

Как Парис определил прекраснейшую из богинь, можно узнать, решив старинную задачу.

108. Богини Гера, Афродита и Афина пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения.

Афродита. Я самая прекрасная. (1)
Афина. Афродита не самая прекрасная. (2)
Гера. Я самая прекрасная. (3)
Афродита. Гера не самая прекрасная. (4)
Афина. Я самая прекрасная. (5)

Парис, прилегший отдохнуть на обочине дороги, не счел нужным даже снять платок, которым прикрыл глаза от яркого солнца. Но богини были настойчивы, и ему нужно было решить, кто из них самая прекрасная. Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух остальных богинь ложны. Мог ли Парис вынести решение, кто прекраснее из богинь? [72]

Задача Дидоны

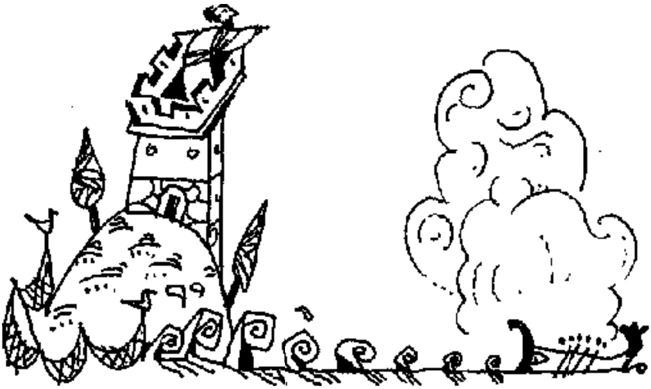
В древнем мифе рассказывается, что тирский царь Пигмалион убил Сихея, мужа своей сестры Дидоны, чтобы овладеть его богатством. Дидона, покинув Финикию, после многих приключений оказалась в Северной Африке. Король нумидийцев Ярб обещал подарить Дидоне участок земли на берегу моря «не больше, чем можно окружить воловьей шкурой». Хитрая Дидона разрезала воловью шкуру на тонкие полоски, связала из них очень длинную веревку и отмерила большой участок земли, на котором основала город Карфаген.

109. Участок земли какой формы окружила Дидона веревкой данной длины, чтобы получить наибольшую площадь?

Задача Фалеса

Начало греческой науки положила ионийская школа натурфилософии. Ее основателем был отец греческой науки Фалес Милетский (ок. 625—547 до н. э.) — купец, политический деятель, философ, астроном и математик. Первоосновой всего сущего Фалес считал воду («Вода есть начало всего; все из нее происходит и в нее превращается»). В математике Фалес доказал несколько важных теорем, предложил способы вычисления высоты фигуры по длине ее тени и определения расстояния до корабля на море.

110. Определить расстояние от берега до корабля на море.



Задача о школе Пифагора

Пифагор

Первое построение геометрии как дедуктивной науки принадлежит Пифагору Самосскому (ок. 570 – ок. 500 до н. э.) – древнегреческому математику и философу. В молодости Пифагор путешествовал по Египту и Вавилону, изучая мудрость жрецов. Около 530 г. до н. э. он переехал в Кротон (Южная Италия), где основал знаменитый пифагорейский союз (школу). Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел). В их школе возникло представление о шарообразности Земли. Пифагорейцы считали, что Земля имеет форму шара и находится в центре Вселенной: ведь нет никаких оснований, чтобы она была смещена или вытянута в какую-то одну сторону. Солнце же, Луна и пять планет (Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн) движутся вокруг Земли. Расстояния от них до нашей планеты таковы, что они как бы составляют семиструнную арфу, и при их движении возникает прекрасная музыка – музыка сфер. Обычно люди не слышат ее из-за суеты жизни, и лишь после смерти некоторые из них смогут насладиться ею. А Пифагор слышал ее и при жизни.

Строй арфы должен был подчиняться законам арифметики. В частности, как обнаружили пифагорейцы, такие музыкальные интервалы, как октава, квинта и кварта, соответствуют звучанию пары одинаково натянутых струн, длины которых находятся в отношении 1 : 2, 2 : 3 и 3 : 4.

Все эти открытия и привели пифагорейцев к идее о том, что «все есть число», т. е. законы природы – не что иное, как законы целых чисел и их отношений.

111. Тиран острова Самос Поликрат однажды спросил на пиру у Пифагора, сколько у того учеников. «Охотно скажу тебе, о Поликрат, – отвечал Пифагор. – Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь еще к ним трех юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Столько учеников веду я к рождению вечной истины». Сколько учеников было у Пифагора? [4]

Задачи Пифагора

112. Доказать, что всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов.

113. Найти сумму n первых нечетных натуральных чисел:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1).$$

114. Решить уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ в натуральных числах.

Задача о кресте

Древние греки на хлебах чертили крест, считая его символом жизни (рис. 3).

115. Разрезать крест на четыре части и сложить из получившихся частей квадрат.

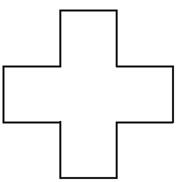


Рис. 3

Задача о статуе Минервы

Сохранилась «Греческая антология» в форме сборника задач, составленных в стихах, главным образом гекза́метром, которым, как известно, написаны знаменитые поэмы Гомера (IX–VIII вв.

до н. э.) «Илиада» и «Одиссея». «Греческая антология» была написана в VI н. э. грамматиком Метродором. В «Греческой антологии» содержится задача о статуе богини мудрости, покровительнице наук, искусств и ремесел Минерве.

116. Я — изваянье из злата. Поэты то злато
В дар принесли: Харизий принес половину всей жертвы,
Феспия часть восьмую дала; десятую — Солон.
Часть двадцатая — жертва певца Фемисона, а девять
Всё завершивших талантов — обет, Аристоником данный.
Сколько же злата поэты все вместе в дар принесли?

Задача о музах

По представлениям древних греков науками и искусствами ведали мифические женские существа — музы:

Евтерпа — богиня-покровительница музыки;
Клио — истории;
Талия — комедии;
Мельпомена — трагедии;
Терпсихора — танцев и хорового пения;
Эрато — поэзии;
Полимния — лирической поэзии;
Урания — астрономии;
Каллиопа — эпоса и красноречия.

Местопребыванием муз и Аполлона служила гора Геликон. Учреждения, где протекала деятельность ученых, назывались музеумами (музеями) — жилищами муз. В поэтической задаче о музах бог любви Эрот жалуется богине красоты и любви Киприде на муз.

117. Видя, что плачет Эрот, Киприда его вопрошает:
«Что так тебя огорчило, ответствуй немедля!»
«Яблок я нес с Геликона немало, — Эрот отвечает, —
Музы, отколь ни возьмись, напали на сладкую ношу.
Частью двенадцатой вмиг овладела Евтерпа, а Клио
Пятую долю взяла. Талия — долю восьмую.
С частью двадцатой ушла Мельпомена. Четверть взяла Терпсихора.
С частью седьмою Эрато от меня убежала.
Тридцать плодов утащила Полимния. Сотня и двадцать
Взяты Уранией; триста плодов унесла Каллиопа.

Я возвращаюсь домой почти что с пустыми руками.
Только полсотни плодов мне оставили музы на долю.

Сколько яблок нес Эрот до встречи с музами?

Задача о грациях

Красивая идея равенства приводится в задаче о трех грациях.

118. Три грации имели по одинаковому числу плодов и встретили девять муз. Каждая из граций отдала каждой из муз по одинаковому числу плодов. После этого у каждой из муз и каждой из граций стало по одинаковому числу плодов. Сколько плодов было у каждой из граций до встречи с музами?

Задача Гиппократа Хиосского

Гиппократ Хиосский (2-я пол. V в. до н. э.) был автором первого систематического сочинения по геометрии, которое до нас не дошло [12].

119. Около прямоугольного треугольника *ABC* описана окружность, на его катетах как на диаметрах построены вне этого треугольника две полуокружности. Доказать, что сумма площадей двух образовавшихся луночек равна площади треугольника *ABC* (рис. 4).

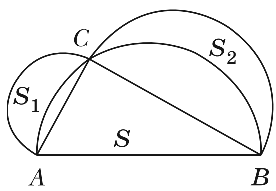


Рис. 4

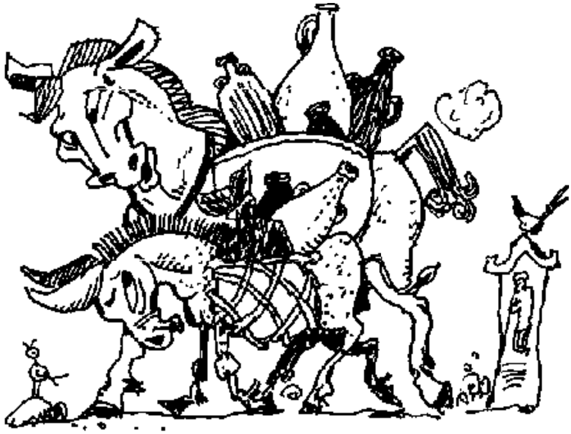
Задачи Евклида

Евклид

В III в. до н. э. древнегреческая геометрия достигла своего апогея в работах знаменитого математика Евклида, написавшего 13 книг, объединенных общим названием «Начала». В трудах Евклида логическая сторона геометрии была доведена до очень высокого уровня.

Величайший геометр требовал благоговения к математике. Один из его учеников, выучив первое предложение «Начал», спросил Евклида: «А что я могу заработать, выучив все это?» Евклид позвал своего раба и сказал: «Дай ему три обола, так как бедняжка хочет заработать деньги своим учением» (обол — мелкая серебряная монета в Древней Греции).

120. Мул и осел под вьюком по дороге с мешками шагали.
Жалобно охал осел, непосильною ношей придавлен.
Это подметивший мул обратился к сопутчику с речью:
«Что ж, старина, ты заныл и рыдаешь, будто девчонка?
Нёс бы вдвойне я, чем ты, если б отдал одну ты мне меру,
Если ж бы ты у меня лишь одну взял, то мы бы сравнялись».



Сколько нес каждый из них, о геометр, поведай нам это.

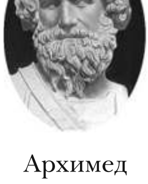
121. На данном отрезке *AB* построить равносторонний треугольник.

122. Разделить произвольный угол на две равные части.

123. Доказать, что нет наибольшего простого числа.

124. Доказать: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

Задачи Архимеда



Архимед

Древнегреческий ученый Архимед (ок. 287–212 до н. э.) принадлежит к числу тех немногих гениев, творчество которых определило на долгие века судьбу науки, а тем самым и судьбу человечества. Родиной Архимеда был богатый торговый город Сиракузы в Сицилии.

Отец Архимеда Фидий был астроном и рано привил сыну любовь к математике, механике и астрономии.

После поездки в Александрию, культурный и научный центр того времени, Архимед возвратился в Сиракузы и до конца жизни переписывался с александрийскими учеными.

Жизнь Архимеда овеяна легендами. Согласно одной из них он в течение двух лет был душой обороны Сиракуз от римских полчищ, блокировавших город с суши и моря. Архимед изобрел знаменитые «архимедов винт» и «архимедов рычаг», открыл закон гидростатики (закон Архимеда).

Математические работы Архимеда подкупают читателя ясностью мысли, изяществом, доведенной до совершенства техникой вычислений. Известный греческий историк Плутарх (ок. 46—126 н. э.) пишет: «Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед». Архимеду принадлежит целый ряд классических сочинений по математике, в которых он предвосхитил методы высшей математики XVII в. [2]. С именем Архимеда связаны знаменитые задачи. Например, задача о быках Солнца, приводящая к решению в больших целых числах неопределенного уравнения $x^2 - 4\,729\,494y^2 = 1$.

125. Доказать, что площадь круга, описанного около квадрата, вдвое больше площади вписанного в квадрат круга.

126. Найти сумму квадратов n первых чисел натурального ряда:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

127. Доказать, что площадь фигуры, ограниченной тремя полуокружностями (это фигуру называли арбелоном или «сапожным ножом»), равна площади круга с диаметром $BD \perp AC$ (рис. 5).

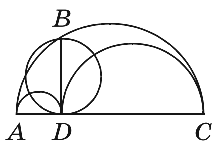


Рис. 5

128. Доказать, что для всякого шара цилиндр, имеющий основанием большой круг этого шара, а высотой диаметр шара, будет иметь объем в полтора раза больше объема этого шара и площадь поверхности тоже в полтора раза больше площади поверхности этого шара.

Это открытие Архимед считал своим самым большим достижением в математике, и, видимо, потому на его могиле были изображены шар и цилиндр.

129. Справедливо ли неравенство $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$?

130. Стомахион Архимеда — классическая игра-головоломка на составление различных фигур из частей особым образом разрезанного исходного квадрата (рис. 6).

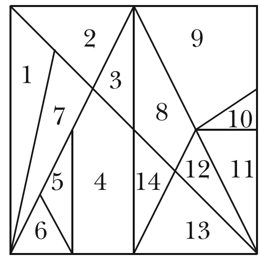


Рис. 6

Эта игра была распространена в позднюю эпоху Римской империи (IV—VI вв.). Описание стомахиона сохранилось в двух отрывках из сочинения Архимеда. Начальный греческий текст был найден известным датским историком математики И. Гейбергом в 1906 г. в знаменитом Константинопольском палимпсесте, т. е. пергаменте, с которого был смыт первоначальный текст. Несколько ранее, в 1899 г., швейцарский историк математики Г. Зутер обнаружил в книгохранилищах Берлина и Кембриджа арабскую рукопись с фрагментами сочинения, озаглавленного «Книга Архимеда о разбиении фигуры стомахиона на 14 частей, находящихся к ней в рациональных отношениях» [41].

Задача Гипсикла Александрийского

Древнегреческий геометр Гипсикл Александрийский (II в. до н. э.) — автор XIV книги «Начал» о правильных многоугольниках, которая долгое время приписывалась Евклиду.

131. Найти формулу для m-го n-угольного числа (P_n^m).

Задачи Герона Александрийского

Работы древнегреческого математика и механика Герона Александрийского (I в. н. э.) являются энциклопедией античной прикладной математики. С именем Герона связаны формулы для определения площади треугольника по трем сторонам, правила численного решения квадратных уравнений и приближенного извлечения квадратных и кубических корней и пр.

Герон писал для инженеров, архитекторов, мастеров-ремесленников. Им было создано практическое и теоретическое руководство по геодезии, служившее этой цели на протяжении многих веков.

132. Из-под земли бьют четыре источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй — за 2 дня, третий — за 3 дня и четвертый — за 4 дня. За сколько времени наполнят бассейн все 4 источника вместе?

133. Даны две точки A и B по одну сторону от прямой l. Найти на l такую точку C, чтобы сумма расстояний от A до C и от B до C была наименьшей.

Задачи Никомаха из Герасы

Широкой известностью в Древней Греции пользовался труд «Введение в арифметику» математика и философа Никомаха из Герасы (I—II вв. н. э.). В этом сочинении содержится обзор начал теории чисел.

134. Проверить справедливость правила для последовательного суммирования одного, двух, трех, ... следующих друг за другом нечетных чисел:

$$1 = 1^3,$$
$$3 + 5 = 2^3,$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3,$$
$$\ldots$$

135. Доказать:

$$P_n^m = P_{n-1}^m + P_3^{m-1}.$$

(Формула m-го n-угольного числа:

$$P_n^m = m + (n-2)\cdot\frac{m(m-1)}{2}$$

(см. задачу 131).)

136. Найти формулу для n-го пирамидального числа

$$n_n = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Древнеримская задача (II *в.*)

137. Некто, умирая, завещал: «Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано $\frac{2}{3}$ имения, а жене — остальная часть. Если же родится дочь, то ей $\frac{1}{3}$, а жене $\frac{2}{3}$». Родилась двойня — сын и дочь. Как же разделить имение?

Задача о Диофанте из Палатинской антологии

Диофант

Диофант Александрийский (II–III вв. н. э.) был последним великим математиком античности. До нас дошли два его сочинения — «Арифметика» (из тринадцати книг сохранилось шесть) и «О многоугольных числах» (в отрывках). Творчество Диофанта оказало большое влияние на развитие алгебры, математического анализа и теории чисел.

О жизни Диофанта известно очень мало. В Палатинской антологии сохранилась эпитафия, из которой «мудрым искусством» мы узнаем отдельные факты из жизни ученого и ее продолжительность.

138. Прах Диофанта гробница покоит: дивись ей — и камень Мудрым искусством его скажет усопшего век.

Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил,
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Задачи Диофанта Александрийского

139. Найти такие три числа, чтобы квадрат суммы всех трех, вычтенный из каждого числа, давал квадрат.

140. Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма двух квадратов, само представляется двумя способами суммой двух квадратов:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(bc\mp ad)^2.$$

ДРЕВНИЙ КИТАЙ

Три пути ведут к знанию:
Путь размышления — самый благородный,
Путь подражания — самый легкий
И путь опыта — это путь самый горький…

Конфуций

Возникновение китайской цивилизации на берегах реки Хуанхэ относится к началу II тыс. до н. э. Сохранились обозначения цифр на гадательных костях животных XIV в. до н. э. На обломках посуды XIII—XII вв. до н. э. имеются изображения геометрических орнаментов с правильными 5-, 7-, 8-, 9-угольниками.

К эпохе, когда «расцвели сто цветов, соперничали сто школ ученых», относится деятельность Конфуция (551—479 до н. э.), выработавшего основы учения о «добродетельном поведении». В это время появились первые книги по математике, которые составили основы «Математики в девяти книгах» (III в. до н. э.) (рис. 7). Для забвения прежних традиций император Цинь Шихуанди в 221 г. до н. э. приказал сжечь все книги. Но уже вскоре, во II в. до н. э., была изобретена бумага и началось восстановление древних книг.

九章算術卷七

魏 劉徽 注

盈不足以御隱雜互見

今有共買物人出八盈三人出七不足四問人數物價各幾何

答曰七人

物價五十三

今有共買雞人出九盈十一人出六不足十六問人數雞價各幾何

答曰九人

雞價七十

今有共買琎人出半盈四人出少半不足三問人數琎價各幾何

答曰四十二人

琎價十七

二十七

Рис. 7

В VIII в. в Китае распространяется буддизм. Развивается китайская иероглифическая письменность (в настоящее время из 49 000 иероглифов в основном используется лишь примерно 5000). В XVIII в. была создана китайская энциклопедия «Полное собрание книг, карт, чертежей и рисунков с древности до нынешнего времени» в 5163 томах.

Среди важнейших достижений китайской математики отметим: правило двух ложных положений, введение отрицательных чисел, десятичных дробей, методов решения систем линейных уравнений, алгебраических уравнений высших степеней и извлечения корней любой степени [13].

Задача Ло-шу

> К глубокой древности относится возникновение магических квадратов, т. е. квадратных таблиц натуральных чисел ($n \times n$), имеющих одну и ту же сумму чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям. Наиболее ранние сведения о магических квадратах содержатся, по-видимому, в древних китайских книгах IV—V вв. до н. э. Самым «старым» из дошедших до нас древних магических квадратов является таблица Ло-шу (2200 г. до н. э.). Название «магические» (волшебные, таинственные) квадраты получили от арабов. Люди верили, что магические квадраты обладают чудесными свойствами, и использовали их как талисманы. [37]

141. Заполнить натуральными числами от 1 до 9 квадратную таблицу размером 3×3 так, чтобы суммы чисел по всем строкам, столбцам и диагоналям были равны одному и тому же числу 15.

Задача из «Математики в девяти книгах»

142. Из 3 снопов хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 39 доу (доу — мера объема) зерна. Из 2 снопов хорошего урожая, 3 снопов среднего урожая и 1 снопа плохого урожая получили 34 доу зерна. Из 1 снопа хорошего урожая, 2 снопов среднего урожая и 3 снопов плохого урожая получили 26 доу зерна. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожая.

Задача Сунь-цзы

Китайский математик Сунь-цзы (III–IV вв.) дал правило действий на счетной доске и изложил способ решения неопределенных уравнений первой степени в целых числах. С его именем связана следующая теоретико-числовая задача.

143. Имеются вещи, число их неизвестно. Если считать их тройками, то остаток 2; если считать их пятерками, то остаток 3; если считать их семерками, то остаток 2. Спрашивается, сколько вещей.

Задача Чжан Цюцзяня

Китайский математик Чжан Цюцзянь (V в.) – автор второго по размеру трактата в текстах «Десятикнижья» после «Математики в девяти книгах». В трех книгах своего трактата Чжан Цюцзянь развивал методы предшественников (Сунь-цзы и др.), уделял внимание таким вопросам, как ряды, уравнения высших степеней, теоретико-числовые проблемы и пр. Ниже предлагается задача из третьей книги трактата Чжан Цюцзяня.

144. 1 петух стоит 5 цяней (цянь – денежная единица), 1 курица стоит 3 цяня, 3 цыпленка стоят 1 цянь. Всего на 100 цяней купили 100 птиц. Спрашивается, сколько было в отдельности петухов, кур, цыплят.

Задача Цзу Чун-чжи

Математик и астроном Цзу Чун-чжи (429–500) является, пожалуй, самым знаменитым в истории науки среди китайских ученых. Его изображение помещено среди выдающихся деятелей мировой науки в фойе актового зала Московского университета. Календарь «Даминли» Цзу Чун-чжи весьма известен в истории китайской астрономии. В историях династий указывается, что Цзу Чун-чжи и его сын Цзу Хэн были авторами утерянной книги «Цзиши» (из пяти или шести свитков), в которой рассматривались уравнения третьей степени и способ оценки числа π.

145. Найти наилучшую обыкновенную дробь к числу π, если

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Рациональная дробь $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ называется наилучшим приближением вещественного числа α, если всякая другая рациональная дробь $\frac{c}{d}$ $(d > 0)$ с тем же или меньшим знаменателем лежит на большем расстоянии от α, т. е. из $0 < d \leqslant b$, $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ необходимо следует $\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| > \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$.

ДРЕВНЯЯ ИНДИЯ

Подобно тому как солнце затмевает своим блеском звезды, так мудрец затмевает славу других людей, предлагая и особенно решая на народных собраниях математические задачи.

Брахмагупта

В долине реки Инда еще в III тыс. до н. э. существовала развитая цивилизация, одним из центров которой был Мохенджо-Даро. В I тыс. до н. э. возникли рабовладельческие государства. Борьба за власть в этих государствах велась между воинами-кшатриями и священниками-брахманами. В это же время появляются священные книги брахманов «Веды» (в переводе с санскритского языка «Знания»). Первые индийские письменные памятники относятся к VII—V вв. до н. э. В V в. до н. э. возникает в Индии новая религия — буддизм. В легенде о Будде рассказывается, что он мог пересчитать по названиям все десятичные разряды чисел от 1 до 10^{54}.

В IV в. до н. э. большая часть Северной Индии была завоевана Александром Македонским (356—323 до н. э.). Примерно в это же время были созданы астрономо-математические труды сиддханты (учения). Одна из важнейших сиддхант была написана Брахмагуптой (ок. 598—660) около 628 г., состояла из 20 книг и называлась «Брахма-спухта-сиддханта» («Усовершенствованное учение Брахмы»). Бхаскара II в XII в. написал трактат «Сид-

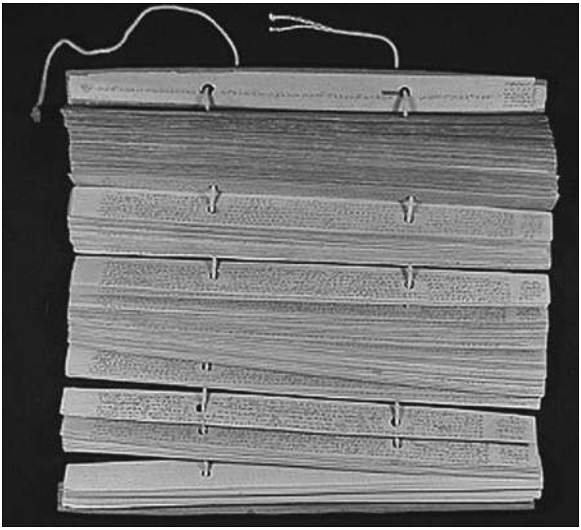


Рис. 8

дханта-широмани» («Венец учения») в четырех частях, из которых стихотворная «Лилавати» («Прекрасная») посвящена арифметике, а «Биджагонита» — алгебре. В XIII в. этот трактат был переписан на полоски пальмовых листьев (рис. 8).

Творчество индийских математиков оказало огромное влияние на развитие арифметики (индийская десятичная позиционная нумерация), алгебры (метод рассеивания для решения неопределенных уравнений первой и второй степени с двумя неизвестными) и тригонометрии (бесконечные ряды для синуса, косинуса и арктангенса). Наиболее ранние сведения о математике в Древней Индии относятся к эпохе составления священных религиозно-философских книг «Веды».

Задача Апастамбы

Древнеиндийскому математику Апастамбе (IV в. до н. э.) принадлежит одна из редакции «Сульвасутра» («Правила веревки»), содержащая геометрические построения и связанные с ними вычисления.

146. Найти сумму кубов первых n натуральных чисел:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Задача о сочетаниях (II *в. до н. э.*)

147. Доказать: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Задача-легенда (*начало н. э.*)

Происхождение шахмат иногда связывают с магическими квадратами. В эпической поэме величайшего персидского поэта Фирдоуси «Шах Намэ» («Книга царей») (1010) описывается легенда, согласно которой шахматную игру изобрели мудрецы, желая с ее помощью рассказать матери царевича Талханда о том, как он, не будучи побежденным в сражении, пал в разгаре боя с войсками своего брата-близнеца Гава.

В поэме английского писателя У. Джонса (1746—1794) рассказывается, что бог войны Марс пленился красотой дриады Каиссы и склонил ее к взаимности изобретением шахмат. Однако наибольшую известность имеет другая версия.

148. В старинной легенде о происхождении шахмат рассказывается, что изобретатель шахмат, которому было предложено запросить любую награду, попросил положить ему в награду на первую клетку шахматной доски одно зерно, на вторую — 2 зерна, на третью — 4 зерна и т. д. Сколько зерен запросил мудрец?

Задача о разрезании шахматной доски

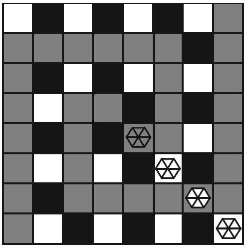


Рис. 9

В старинной легенде о четырех алмазах рассказывается о восточном властелине. Он был искусным игроком в шахматы и за всю жизнь проиграл лишь четыре раза. В честь мудрецов-победителей властелин приказал инкрустировать алмазами четыре поля доски, на которых был заматован его король (рис. 9). Но сын после смерти властелина решил отомстить мудрецам за их победы и потребовал разделить шахматную доску с алмазами на четыре одинаковые части с одним алмазом в каждой. Мудрецы выполнили требование, разрезав доску только по границам между вертикалями и горизонталями доски. Однако жестокий деспот, как гласит легенда, все равно казнил каждого мудреца, используя его часть доски с алмазом.

149. Как мудрецы разделили шахматную доску с алмазами на четыре одинаковые части с одним алмазом в каждой?

Задача Ариабхаты

Индийский астроном и математик Ариабхата (476 – ок. 550) – автор своеобразной энциклопедии «Ариабхатиам». В этом сочинении собрано все наиболее важное и ценное в индийской математике и астрономии. Первый индийский искусственный спутник Земли был запущен с советского космодрома 19 апреля 1975 г. и назван именем великого ученого древности Ариабхаты [22].

150. Два лица имеют равные капиталы, причем каждый состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Но как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

Задача Бхаскары I

Учеником Ариабхаты был Бхаскара I (VI в.). Неопубликованная рукопись по математике Бхаскары I относится к 522 г. Он придал слоговому обозначению чисел позиционность, ввел слог для обозначения пустого разряда. Один и тот же слог мог служить в данном числе для обозначения 7, 70, 700 и т. д.

151. Найти натуральные числа, дающие при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 остаток 1 и, кроме того, делящиеся на 7.

Задача Брахмагупты

Индийский математик и астроном Брахмагупта (ок. 598–660) – автор сочинения «Усовершенствованное учение Брахмы». В этом сочинении Брахмагупта изложил учение об арифметическойпрогрессии, решение квадратных уравнений с действительными корнями и др.

152. Найти высоту свечи, зная длины теней, отбрасываемых вертикальным шестом в двух различных положениях, и расстояние между ними (рис. 10).

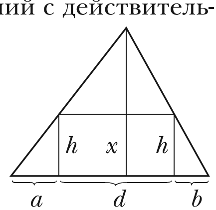


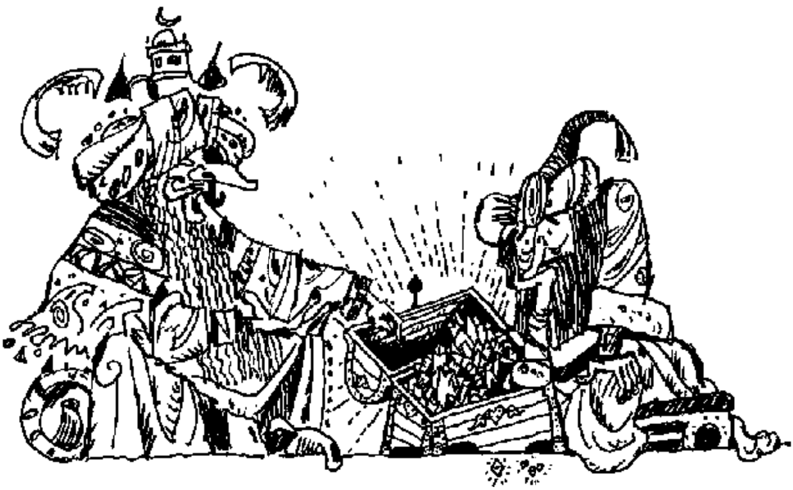
Рис. 10

Задачи Магавиры

В IX в. в Индии жил математик и астроном Магавира. В своем «Кратком курсе математики» он установил двузначность квадратного корня, ставил вопрос об извлечении корня из отрицательного числа, решал задачи, приводящие к системам линейных уравнений с несколькими неизвестными, суммировал ряды квадратов и кубов членов арифметической прогрессии.

153. Найти число павлинов в стае, $\frac{1}{16}$ которой, умноженная на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат $\frac{1}{9}$ остатка вместе с 14 другими павлинами — на дереве тамала.

154. О друг, назови число различных ожерелий, которые можно получить из бриллиантов, сапфиров, изумрудов, кораллов и жемчугов.



Задача Шридхары

Индийский математик и астроном Шридхара (IX–X вв.) в сочинении «Патиганита» («Искусство вычисления на доске») излагает методы возведения в квадрат и куб, операций с дробями, занимается решением неопределенных уравнений второй степени с двумя неизвестными и др. Сочинение Шридхары «Тришатик» содержало 300 стихов.

155. Повар готовит различные блюда с шестью вкусовыми оттенками: острым, горьким, вяжущим, кислым, соленым, сладким. Друг, скажи, каково число всех разновидностей?

Задачи Бхаскары II

Крупнейший индийский математик и астроном Бхаскара II (род. 1114 – ум. позднее 1178) – автор сочинения «Венец учения», в котором содержались решения алгебраических и теоретико-числовых задач. Вершиной достижений Бхаскары II является циклический метод решения в целых положительных числах неопределенного уравнения второй степени с двумя неизвестными.

156. Прекрасная дева с блестящими очами, ты, которая знаешь, как правильно применять метод инверсии, скажи мне величину такого числа, которое, будучи умножено на 3, затем увеличено на $\frac{3}{4}$ этого произведения, разделено на 7, уменьшено на $\frac{1}{3}$ частного, умножено само на себя, уменьшено на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, дает число 2. (*Метод инверсии предполагает выполнение действий с конца задачи.*)

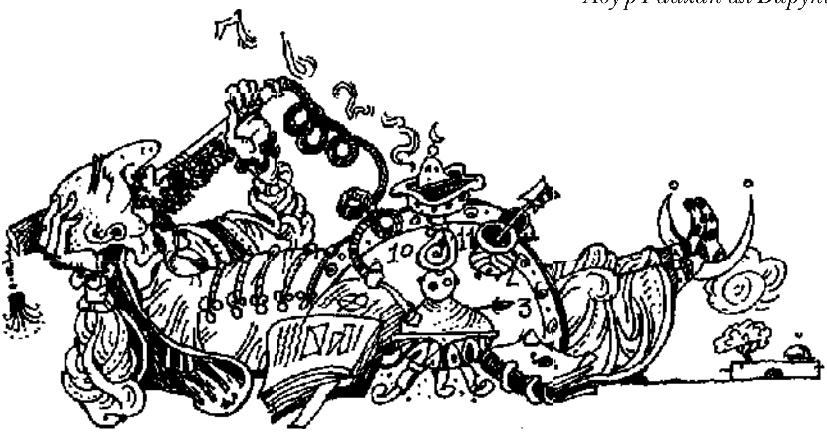
157. Решить уравнение $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$.

158. Решить уравнение в целых числах $100x + 90 = 63y$.

СТРАНЫ ИСЛАМА

Знание — самое превосходное из владений. Все стремятся к нему, само же оно не приходит.

Абу-р-Райхан ал-Бируни



В X в. образовался арабский халифат, простиравшийся от Испании до Индии. Главным научным центром арабского халифата был Багдад. Крупнейшие ученые средневековья — Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми, Сабит ибн Корра ал-Харани, Абу Али Ибн Сина (Авиценна), Абу-р-Райхан ал-Бируни, Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим Хайям, Насирэддин ат-Туси, Джемшид Гияс ад-Дин ал-Каши — писали свои математические сочинения в основном на арабском языке.

Многие достижения арабской математики связаны с исследованиями в астрономии. В частности, были разработаны вычислительно-алгоритмические проблемы и методы. Значительных успехов достигли арифметика и геометрия. Алгебра и тригонометрия впервые сформировались в самостоятельные науки. А употребляемые нами такие термины, как «арабские цифры», «корень», «алгебра», «алгоритм», «синус», напоминают о влиянии науки стран ислама. Большинство названий звезд и астрономические термины имеют также арабское происхождение [98]; [100]; [101].

Задача из легенды «История Морадбальса»

159. Одна женщина отправилась в сад собрать яблоки. Чтобы выйти из сада, ей нужно было пройти через 4 двери, у каждой из которых стоял стражник. Стражнику у первых дверей женщина отдала половину собранных ею яблок. Дойдя до второго стражника, женщина отдала ему половину оставшихся яблок. Так же она поступила и с третьим стражником; а когда она поделилась яблоками со стражником у четвертых дверей, то у нее осталось лишь 10 яблок. Сколько яблок она собрала в саду?

Задача из сказки «1001 ночь» (ночь 458-я)

160. Стая голубей подлетела к высокому дереву. Часть голубей села на ветвях, а другая расположилась под деревом. Сидевшие на ветвях голуби говорят расположившимся внизу: «Если бы один из вас взлетел к нам, то вас стало бы втрое меньше, чем нас всех вместе, а если бы один из нас слетел к вам, то нас с вами стало бы поровну». Сколько голубей сидело на ветвях и сколько под деревом?

Задача Сабита ибн Корры

Знаменитый физик, математик и астроном средневекового Востока Сабит ибн Корра ал-Харани (836–901) был автором около 100 работ. Он дал комментарий к собственному переводу «Начал» Евклида, познакомил арабских математиков с сочинениями Архимеда о правильном семиугольнике.

161. Найти сумму квадратов n первых нечетных чисел:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2.$$

Задачи Абу Камила

Египетский математик Абу Камил Шуджа ибн Аслам ал-Мисри (ок. 850—930) был автором трактатов: «Книга об алгебре и алмукабале», «Книга о редкостях искусства арифметики» и «О пятиугольнике и десятиугольнике».

162. Разделить 10 на две части x и $10 - x$ так, что

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}.$$

163. Решить в целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + u + v = 100, \\ 2x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} + \dfrac{u}{4} + v = 100. \end{cases}$$

164. Вычислить стороны вписанного и описанного правильных пятиугольников для окружности радиуса R.

Задача Абу-л-Вафы

Крупнейший математик и астроном средневекового Востока Абу-л-Вафа (940—998) написал оригинальные сочинения «Книга о том, что нужно знать писцам, дельцам и другим в науке арифметики», «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений» и др. Абу-л-Вафа комментировал сочинения Евклида, Диофанта, Птолемея и ал-Хорезми. Его многочисленные труды по арифметике, геометрии, алгебре, тригонометрии и астрономии сыграли огромную роль в истории науки.

165. Два из трех равновеликих квадратов разрезать на 8 частей так, чтобы из них и из третьего равновеликого квадрата можно было составить квадрат.

Задача ал-Караджи

Иранский математик Абу Бакр Мухаммед ибн ал-Хасан ал-Караджи (г. рожд. неизв. — ок. 1030) в трактате «Аль-Фахри» изложил все известные его предшественникам алгебраические знания с собственными добавлениями и решением более 250 алгебраических задач.

166. Доказать: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Задача Ибн ал-Хайсама

Выдающийся математик, астроном и физик Востока Абу Али Хасан ибн ал-Хайсам ал-Басри (965—1039) в Европе был известен как Альгазен. Он написал знаменитую «Книгу оптики», трактаты «О параболическом вогнутом зеркале», «Квадратура круга», комментарии к «Началам» Евклида и др.

167. Найти сумму четвертых степеней n первых натуральных чисел:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4.$$

Задача Ибн Сины

Великий среднеазиатский ученый-энциклопедист Абу Али Ибн Сина (Авиценна) (980—1037) был одним из наиболее выдающихся мыслителей средневековья. Творческое наследие Ибн Сины оставило неизгладимый след в истории философии, медицины, химии и других наук. Его «Канон врачебной науки» долгое время служил основным руководством по медицине. Большие разделы энциклопедий «Книга исцелений», «Книга спасения» и «Книга знания» посвящены физико-математическим наукам. Около 20 сочинений Ибн Сины посвящено астрономии.

168. Доказать, что если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1.

Задача Насирэддина ат-Туси

Чрезвычайно разносторонний ученый-энциклопедист Насирэддин ат-Туси (1201—1274) был автором сочинений по математике, астрономии, философии, географии, музыке, оптике, медицине и минералогии. Руководил обсерваторией в Мараге, здесь были составлены «Эльханские» астрономические таблицы. Среди математических трудов ат-Туси особенно значительны его работы по плоской и сферической тригонометрии и прежде всего «Трактат о полном четырехстороннике». Ему принадлежат трактаты по арифметике, алгебре, теории чисел и в том числе «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли» [105].

169. Доказать: $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Задача ал-Каши

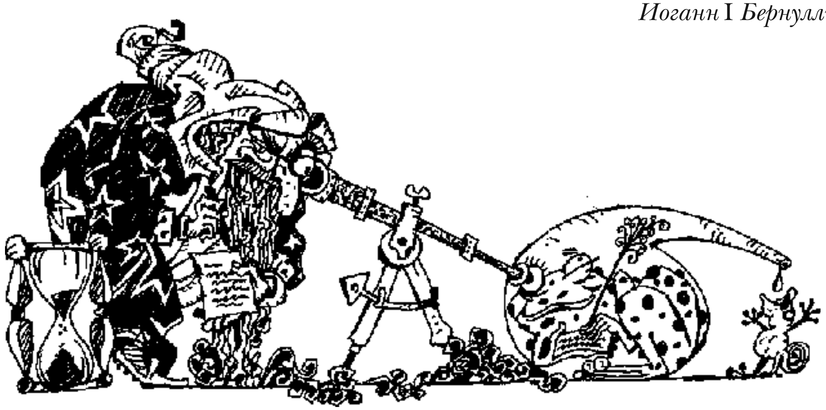
Крупнейший математик и астроном Джемшид Гияс ад-Дин ал-Каши (г. рожд. неизв. – ок. 1436–1437) был одним из руководителей Самаркандской обсерватории Улугбека. Ал-Каши – автор многих сочинений по астрономии, в том числе «Хаканские астрономические таблицы», «Лестница небес», «Прогулка по садам». Математике ал-Каши посвятил замечательные произведения: «Ключ арифметики», «Трактат об окружности», «О хорде и синусе». Он впервые изложил и мастерски применил теорию десятичных дробей.

170. Плата работнику за месяц, то есть за тридцать дней, десять динаров и платье. Он работал три дня и заработал платье. Какова стоимость платья?

ЕВРОПА

Ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и в то же время полезной задачи.

Иоганн I *Бернулли*



В середине I тыс. в Европе феодализм пришел на смену рабовладельческому строю. Возникают и укрепляются монархии. Христианство превращается в государственную религию. Центрами распространения знаний и просвещения сначала были монастыри, а позднее университеты. Общим языком ученых становится латынь. Постепенный прогресс культуры и науки в средние века связан с развитием ремесла, производства, торговли. Творения романской и готической архитектуры украсили развивающиеся города. Духовный мир эпохи нашел яркое выражение в поэме «Божественная комедия» Данте Алигьери (1265–1321).

Однако научные знания распространялись медленно. Не было научных обществ и журналов, математики не вели научной переписки.

Характерная примета того времени — научные турниры. Победа в таком турнире порой становилась решающим событием в жизни. Победителю доставалась не только слава, но и крупное денежное вознаграждение, а часто и весьма выгодное приглашение на работу.

В эпоху Возрождения (XV–XVI вв.) в Европе появляется компас, порох, часы, бумага, книгопечатание; создаются художественные шедевры. Рост торговли и мореплавания привели к великим географическим открытиям. Повысилась роль математики. Если в начале средних веков математики в основном занимались астрологией и преследовались как колдуны и чернокнижники, то теперь они становятся в центре внимания. На смену математики постоянных величин пришел период переменных величин. Понятие функции стало главным предметом исследования. На первом этапе математической революции XVII в. была создана аналитическая геометрия. Особенно интенсивно развивался анализ бесконечно малых. Появление проективной геометрии и теории вероятностей предвещало большое будущее в их развитии. В XVIII столетии дифференциальное и интегральное исчисление продвинулось далеко вперед, усилия ученых направлялись на создание новых отделов математического анализа и его приложений в механике. Научная деятельность крупнейших математиков сосредоточилась в прославленных академиях в Париже, Петербурге и Берлине. Дальнейшее расширение и углубление предмета математики привело в начале XIX в. к современному периоду ее развития [105]; [114].

Чешская задача

171. По преданию, основательница чешского государства принцесса Либуша обещала отдать свою руку тому из трех женихов, кто сумеет решить задачу: «Если бы я дала первому жениху половину слив из этой корзины и еще одну сливу, второму жениху половину оставшихся слив и еще одну сливу, а оставшиеся сливы поделила пополам и половину их и еще три сливы дала бы третьему жениху, то корзина опустела бы». Сколько слив в корзине?

Задача Алкуина

Однажды на привале после удачной охоты ирландский ученый монах Алкуин (735–804) в шутку предложил королю Карлу Великому задачу. Ответ короля показал, что он был не только искусный охотник, но и знал толк в арифметике.

172. За сколько прыжков гончая настигнет зайца, если первоначально их разделяет расстояние 150 футов, заяц с каждым прыжком удаляется от собаки на 7 футов, а собака бежит быстрее зайца и с каждым прыжком приближается к нему на 9 футов? (*Фут — мера длины, приблизительно равная длине ступни человека.* См. Приложения. I. Метрическая система мер.)

Задача о волке, козе и капусте

Эту знаменитую задачу Алкуин поместил в своем сочинении «Задачи для оттачивания ума юношей».

173. Через реку надо перевезти троих: волка, козу и кочан капусты; на лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трех. Как перевезти их, чтобы коза не могла съесть капусту, а волк не мог съесть козу?

Задача Иоанна Палермского

При дворе римского императора Фридриха II устраивались научные диспуты. На одном из математических турниров в 1225 г. в Пизе в присутствии Фридриха II магистром Иоанном Палермским была предложена итальянскому математику Леонардо Пизанскому следующая задача.

174. Найти рациональное квадратное число, которое, будучи увеличено или уменьшено на 5, дает рациональные квадратные числа.

Задачи Леонардо Пизанского

Леонардо Пизанский (1180—1240) имел прозвище Фибоначчи, т. е. «сын Боначчо» (Боначчо — добродушный). Основные достижения Леонардо Пизанского изложены в его сочинениях «Книга абака» (1202) и «Практика геометрии» (1220). В 1223 г. Леонардо посвятил второе издание «Книги абака» своему другу Микеле Скотто — придворному астроному и астрологу императора Фридриха II, которого потом Данте упоминает в «Божественной комедии». (Данте поместил его в восьмой круг ада, в четвертый ров, вместе с другими обманщиками, выдававшими себя за прорицателей:

А следующий, этот худобокой,
Звался Микеле Скотто и большим
В волшебных плутнях почитался докой.)

175. 30 птиц стоят 30 монет, куропатки стоят по 3 монеты, голуби — по 2 и пара воробьев — по монете; спрашивается, сколько птиц каждого вида.

176. Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года. Причем природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождаются кролики со второго месяца.

177. Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько у каждого?

178. Выбрать 5 гирь так, чтобы с их помощью можно было взвесить любой груз от 1 до 30 целых весовых единиц. Все гири при взвешивании разрешается ставить только на одну и ту же чашку весов.

179. Найти рациональные числа x, y, z такие, чтобы каждая из сумм

$$x + y + z + x^2$$
$$x + y + z + x^2 + y^2$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$$

была квадратом.

Задача Иоганна Региомонтана

Немецкий астроном и математик Региомонтан (псевдоним Иоганна Мюллера) (1436–1476) занимался усовершенствованием календаря и систематизацией тригонометрии [8].

180. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентре).

Задача Леонардо да Винчи

Великий художник и ученый эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452–1519) считал искусство и науку средством объективного познания реального мира. Сохранилось богатейшее наследие Леонардо да Винчи в виде рукописей и рисунков (около семи тысяч страниц), содержащих его мысли об искусстве, науке и технике. Из рукописных фрагментов позднее был составлен и издан «Трактат о живописи», где приводятся сведения о пропорциях. В частности, Леонардо да Винчи принадлежит термин «золотое сечение» (см. решение задачи № 164 и приложение III). В эпоху Возрождения золотое сечение было очень популярным среди художников, скульпторов и архитекторов. Например, Леонардо да Винчи использовал его в композиции своей знаменитой «Джоконды». Среди математических записей наиболее значительное место занимают вопросы преобразования равновеликих фигур и тел, исследование луночек, геометрические построения циркулем и линейкой и др. [56].

181. Доказать, что если две равные окружности пересекаются друг с другом, то прямая, проходящая через точки их пересечения, будет в любой части длины находиться на одинаковых расстояниях от того и другого центра.

Задача Адама Ризе

В XVI в. немецкие алгебраисты назывались коссистами, так как алгебру они именовали coss — от итальянского слова cosa — вещь (неизвестная). Одним из знаменитых коссистов был Адам Ризе (1489–1559). В 1524 г. он написал учебник по алгебре. Ризе

свел 90 правил для решения квадратных уравнений с одним неизвестным к 24. Кристоф Рудольф (1500 – сер. XVI в.) 24 правила привел к 8, и, наконец, крупнейший коссист Михаэль Штифель (1486–1567) вместо восьми правил установил одно, употребляемое и в настоящее время.

182. Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по одной трети ваших денег, и я приобрету лошадь». Наконец, третий говорит первым двум: «Дайте мне только по четвертой ваших денег, и лошадь будет моя». Теперь спрашивается, сколько денег было у каждого.

Задача Альбрехта Дюрера

Великий художник и ученый эпохи Реформации в Германии Альбрехт Дюрер (1471–1528) специально для художников написал трактаты: «Наставление об измерении с помощью циркуля и линейки» и «О человеческой пропорции». Дюрер много занимался геометрическими построениями, заложил основы ортогонального проектирования, дал правила перспективных построений, составлял магические квадраты [76].

183. Построить магический квадрат 4×4 для натуральных чисел от 1 до 16, чтобы два числа в нижних средних клетках указывали на год создания талисмана (1514), а сумма чисел угловых клеток квадрата и сумма чисел четырех центральных клеток образовывали магическую сумму (34).

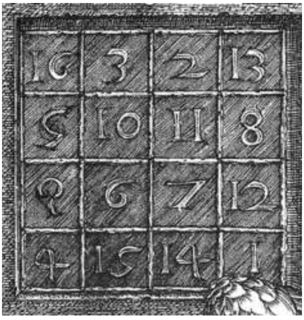


Рис. 11

Дюрер поместил свой магический квадрат (рис. 11) на знаменитой гравюре «Меланхолия». Числа 15 и 14, стоящие в нижней строке квадрата, указывают на год создания гравюры. Гравюра «Меланхолия» напоминает философский трактат и полна сложной символики. Само понятие «меланхолия» заимствовано из созданного еще античными философами учения о четырех темпераментах. Люди с меланхолическим темпераментом склонны к наукам, раз-

Меланхолия

мышлению, искусству. В эпоху Возрождения меланхолический темперамент связывали с представлением о гениальности. В своей интерпретации меланхолии Дюрер опирается на учение гуманистов XV в. Его меланхолия, несомненно, находится под знаком Сатурна. Об этом свидетельствует изображенный на стене здания магический квадрат, который должен, видимо, играть роль талисмана, предохраняющего от дурного влияния несчастливой планеты, и усилить воздействие планеты Юпитер. Заметим, наконец, что многие исследователи видят в «Меланхолии» духовный автопортрет самого художника.

Задачи Михаэля Штифеля

Существенный вклад в развитие алгебры внес крупнейший немецкий коссист Михаэль Штифель. Он одним из первых в Европе стал оперировать с отрицательными числами, ввел дробный и нулевой показатели степени, дал правило деления на дробь и др. Штифель много занимался разработкой способов построения магических квадратов четного и нечетного порядков. Штифель предсказал на 13 сентября 1553 г. конец света. Прихожане ликвидировали со страху свое имущество к этому дню, впоследствии сильно возмутились, и предсказателю грозила суровая расправа, от которой его едва спасло заступничество Лютера.

184. Построить магический квадрат 9×9.

185. Проверить равенство: $\sqrt{16} + \sqrt[3]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} + \sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

186. Упростить: $\sqrt[3]{45 + \sqrt{1682}}$.

Задача Никколо Тартальи

Тарталья

Никколо Тарталья (ок. 1499—1557) был одним из крупнейших математиков эпохи Возрождения. Настоящее имя ученого Никколо Фонтана. В шесть лет Никколо получил увечье от безжалостного удара французского солдата и после этого до конца жизни носил прозвище Тарталья (картавый). Никколо рос в бедности и знания добывал самообразованием. 12 февраля 1535 г. Тарталья одержал убедительную победу на математическом турнире над молодым итальянским математиком Антонио Марио Фиори. Основные труды Тартальи посвящены математике, механике, баллистике, геодезии, фортификации. «Общий трактат о числе и мере» в двух томах Тартальи содержит разнообразный материал по арифметике, алгебре и геометрии. Имя Тартальи связано с разработкой способа решения кубических уравнений в радикалах.

187. На данном отрезке AB при помощи данного раствора циркуля (не равного AB) и линейки построить равносторонний треугольник.

Задача Джироламо Кардано


Кардано

Джироламо Кардано (1501–1576) — математик, врач, естествоиспытатель и изобретатель — был одним из выдающихся и разносторонних ученых эпохи Возрождения. Основной труд Кардано — «Великое искусство». Имя Кардано наряду с именем Тартальи связано с разработкой способа решения кубических уравнений в радикалах. В наше время в технике широко применяется карданов вал и карданова подвеска [38].

188. Построить общую касательную к двум данным окружностям.

Задачи Франсуа Виета


Виет

Замечательный математик французского Ренессанса Франсуа Виет (1540–1603) ввел коренные улучшения в алгебраическую символику. Среди многих своих открытий сам он особенно высоко ценил установление зависимости между корнями и коэффициентами уравнений. Виет много занимался алгебраическими уравнениями, соответствующими делению угла на три, пять и семь равных частей. Он нашел разложение $\cos nx$ и $\sin nx$ по степеням $\cos x$ и $\sin x$. Это позволило ему сразу решить в октябре 1594 г. уравнение 45-й степени с числовыми коэффициентами, предложенное как вызов всем математикам мира голландским ученым Андрианом ван Роуменом (1561–1615). Виет разработал оригинальное исчисление прямоугольных треугольников и впервые рассмотрел бесконечные произведения.

В задачах 189–192 доказать тождества.

189. $\sin nx = 2\sin x \cdot \cos (n-1)x + \sin (n-2)x.$

190. $\sin nx = 2\cos x \cdot \sin (n-1)x - \sin (n-2)x.$

191. $\cos nx = -2\sin x \cdot \sin (n-1)x + \cos (n-2)x.$

192. $\cos nx = 2\cos x \cdot \cos (n-1)x - \cos (n-2)x.$

Задача Иоганна Кеплера

Кеплер

Немецкий астроном, математик и физик Иоганн Кеплер (1571—1630) открыл законы движения планет. В книге «Новая стереометрия винных бочек» Кеплер развил оригинальные методы, сыгравшие важную роль в становлении идей интегрального исчисления, дал подробную теорию использования логарифмов для вычислений [7].

193. Расстояние от середины образующей прямого цилиндра до наиболее далекой точки цилиндра равно d. Найти максимум объема этого цилиндра.

Задача Иоганна Фаульхабера

Немецкий математик и инженер Иоганн Фаульхабер (1580—1635) в сочинении «Школа алгебры» вычислил суммы степеней натуральных чисел вплоть до $1^{17} + 2^{17} + 3^{17} + \ldots + n^{17}$.

194. Доказать:

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2).$$

Задачи К. Г. Баше де Мезириака

Французский любитель математики, поэт и писатель Клод Гаспар Баше де Мезириак (1587—1638) — автор оригинальных сборников математических развлечений: «Занимательные и приятные математические задачи» (1612) и «Задачи забавные и сладостные, кои совершаются в числах» (1624).

195. Двое называют поочередно числа от единицы до десяти, и выигрывает тот, кто первый доведет до ста сумму чисел, названных обоими игроками. Какой должна быть выигрышная стратегия?

196. Разделить 8 мер жидкости поровну, имея посуды емкостью 3 и 5 мер.

Задача Рене Декарта

Декарт

Французский философ и математик Рене Декарт (1596—1650) заложил основы аналитической геометрии и ввел многие современные алгебраические обозначения. В «Геометрии» (1637) Декарта широкое применение получило понятие переменной величины. Основным достижением Декарта в аналитической геометрии явился метод координат (декартовы координаты) [77].

Рене Декарт отзывался о математике без должного почтения. Еще в «Правилах для руководства ума» он писал, что «нет ничего более пустого, чем заниматься бесплодными числами и воображаемыми фигурами» [54].

197. Дан единичный отрезок. Разделить с помощью циркуля и линейки отрезок a на отрезок b.

Задачи Бонавентуры Кавальери

Итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598—1647) в своей «Геометрии неделимых» развил метод неделимых для определения площадей и объемов. Творчество Кавальери сыграло большую роль в формировании исчисления бесконечно малых.

198. Доказать: $\lg(a+b) = \lg a + \lg 2 + 2\lg\sin\dfrac{90^\circ + \varphi}{2}$, где $\sin\varphi = \dfrac{b}{a}$ $(a > b \geqslant 0)$.

199. Доказать: $\lg(a - b) = \lg a + \lg\cos 2\varphi$, где $a > b \geqslant 0$ и $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{b}{2a}}$.

Французская задача XVII в.

200. Трое имеют по некоторой сумме денег каждый. Первый дает из своих денег двум другим столько, сколько есть у каждого. После него второй дает двум другим столько, сколько каждый из них имеет. Наконец, и третий дает двум другим столько, сколько есть у каждого. После этого у всех троих оказывается по 8 экю (монет). Спрашивается, сколько денег было у каждого вначале.

Задачи Пьера Ферма

Ферма

Выдающийся французский математик Пьер Ферма (1601—1665) был по профессии юрист. В теории чисел с его именем связаны знаменитые теоремы: великая теорема Ферма и малая теорема Ферма (задача 202). В геометрии он явился непосредственным предшественником Декарта. Важную роль сыграл Ферма в зарождении теории вероятностей. В его трудах получили систематическое развитие операции дифференцирования и интегрирования. С именем Ферма связано установление вариационного принципа геометрической оптики [94].

201. Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $q_1, q_2, q_3, \ldots$, то

$$\frac{S}{S-q_1} = \frac{q_1}{q_2}.$$

202. Доказать, что если p — простое число и a — любое натуральное, то

$$a^p - a$$

делится на p.

Задача Франца ван-Скаутена

Голландский математик Франц ван-Скаутен (1615—1660) — автор сочинения «Математические этюды», где рассматривалась предлагаемая ниже задача.

203. Найти число делителей ($\tau(m)$) числа $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа.

Задача Джона Валлиса

Основной труд английского математика Джона Валлиса (1616—1703) «Арифметика бесконечного» сыграл важную роль в предыстории интегрального исчисления. Валлис нашел выражение для числа π в виде бесконечного произведения и ввел общепринятый знак для бесконечности.

Джон Валлис был профессором геометрии в Оксфорде. Но математика являлась далеко не единственной областью знания, привлекавшей его внимание. Он занимался богословием, философией, медициной. Среди многих его сочинений есть трактаты об анатомии головного мозга и способе обучения глухонемых общению. Он был непревзойденным специалистом в области криптоанализа (расшифровка тайнописей).

Лейбниц, сам небезуспешно занимавшийся криптоанализом, делал неоднократные попытки узнать у Валлиса методы его работы, но Валлис отклонил все обещанные ему за это блага [52].

204. Найти сумму всех делителей ($S(m)$) числа

$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа.

Задача Блеза Паскаля

Паскаль

Французский философ, писатель, математик и физик Блез Паскаль (1623—1662) рано проявил свои выдающиеся математические способности. Круг математических интересов Паскаля был весьма разнообразен. Паскаль доказал одну из основных теорем проективной геометрии (теорема Паскаля), сконструировал суммирующую машину (арифмометр Паскаля), дал способ вычисления биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля), впервые точно определил и применил для доказательства метод математической индукции, сделал существенный шаг в развитии анализа бесконечно малых, сыграл важную роль в зарождении теории вероятностей. В гидростатике Паскаль установил ее основной закон (закон Паскаля). «Письма к провинциалу» Паскаля явились шедевром французской классической прозы [59]; [86].

205. Найти общий признак делимости на натуральное число.

Задача Жака Озанама

Французский математик Жак Озанам (1640—1717) — автор занимательной книги «Математические и физические развлечения», которая выдержала много изданий, начиная с 1696 г. Предлагаем задачу из «Курса математики» Озанама.

206. Трое хотят купить дом за 2400 ливров. Они условились, что первый даст половину, второй — одну треть, а третий — оставшуюся часть. Сколько даст каждый?

Задачи Исаака Ньютона

Ньютон

Исаак Ньютон (1643–1727) – величайший английский физик и математик – создал теоретические основы механики и астрономии, открыл закон всемирного тяготения, разработал (независимо от Г. В. Лейбница) дифференциальное и интегральное исчисление, изобрел зеркальный телескоп, автор важнейших экспериментальных работ по оптике. С именем Ньютона связаны задачи, в частности, по элементарной математике [17].

207. Даны 3 последовательных члена геометрической прогрессии. Их сумма равна 19, а сумма их квадратов 133. Определить эти члены.

208. Даны 4 последовательных члена геометрической прогрессии. Сумма двух крайних членов равна 13, двух средних 4. Определить эти члены.

209. На трех лугах площадью $3\frac{1}{3}$, 10 и 24 га трава растет одинаково, т. е. с одинаковой густотой и с одним и тем же приростом. После того как на первом лугу 12 коров паслись 4 недели, а на втором лугу 21 корова паслась 9 недель, трава оказалась съеденной настолько, что оба пастбища на время пришлось забросить. Сколько коров можно пасти на третьем лугу в течение 18 недель?

210. Два почтальона *A* и *B*, которых разделяет расстояние в 59 миль, выезжают утром навстречу друг другу. *A* проезжает за 2 ч 7 миль, а *B* – за 3 ч 8 миль, при этом *B* отправляется в путь часом позже *A*. Найти, сколько миль проедет *A* до встречи с *B*.

Задачи Г. В. Лейбница

Лейбниц

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) – немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. В математике наряду с И. Ньютоном разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Важный вклад Лейбниц внес в комбинаторику. С его именем, в частности, связаны теоретико-числовые задачи [90].

211. Показать, что если n — целое число, то $n^5 - n$ делится на 5.

212. Показать, что если n — целое число, то $n^7 - n$ делится на 7.

Задача Абрахама де Муавра

Английский математик Абрахам де Муавр (1667—1754) был выходцем из Франции. С его именем связаны правила возведения в n-ю степень и извлечения корня n-й степени для комплексных чисел. Муавр много занимался исследованием рядов и доказал частный случай предельной теоремы в теории вероятностей.

213. Доказать, что для любого натурального n:

$$(\rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Задача Христиана Вольфа

Немецкий философ, математик и физик Христиан Вольф (1679—1754) — автор «Математического лексикона». Он впервые ввел ряд математических терминов, в том числе «квадратное уравнение». В Марбурге среди слушателей Вольфа был М. В. Ломоносов.

214. Доказать, что $\lg(a + b) = \lg a - 2\lg\sin\varphi$, если $a > b > 0$ и $\lg\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}(\lg a - \lg b)$.

Задача Р. А. Ф. Реомюра

Французский физик и естествоиспытатель Р. А. Ф. Реомюр (1683—1757) известен как изобретатель термометра с постоянной нулевой точкой. В 1732 г. Реомюр предложил швейцарскому математику И. С. Кёнигу (1712—1757) задачу о пчелиных сотах.

215. При каких пропорциях ромбовидные наугольники шестигранных пчелиных восковых ячеек для одного и того же объема дают наименьшую поверхность?

Задача Этьенна Безу

Французский математик Этьенн Безу (1730—1783) занимался исследованием свойств систем алгебраических уравнений высших степеней и установил теорему о делении многочлена на линейный двучлен (теорема Безу).

216. По контракту работникам причитается по 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с них взыскивается по 12 франков. Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали в течение этих 30 дней?

Задача Джона Вильсона

Английский математик Эдуард Варинг (1734—1798) в 1770 г. опубликовал в «Алгебраических размышлениях» наиболее известный критерий простого числа и приписал его сэру Джону Вильсону (1741—1793).

217. Доказать, что натуральное число $n > 1$ тогда и только тогда является простым, когда $(n - 1)! + 1$ делится на n.

Задача Софи Жермен

С детства увлекалась математикой француженка Софи Жермен (1776—1831). Из-за запретов родителей Софи занималась математикой тайком. Однажды Жермен написала письмо от мужского имени королю математиков К. Ф. Гауссу (1777—1855) с просьбой разъяснить некоторые вопросы. Гаусс по достоинству оценил своего талантливого инкогнито. Завязалась переписка. В 1807 г. Софи просила французского генерала, командовавшего оккупационными войсками, пощадить жизнь Гаусса. Глубоко тронутый происшедшим Гаусс до конца жизни сохранил глубокое уважение и дружбу к Софи Жермен. В 1816 г. Софи Жермен была присуждена премия Парижской академии наук. Математические работы Жермен относятся к геометрии и теории чисел.

Заметим, что у Софи Жермен были замечательные предшественницы женщины-математики: Теано (VI в. до н. э.), Аскотея и Ластения (IV в. до н. э.), Гипатия Александрийская (370—415), Эмилия дю Шатле (1706—1749), Мария Лаланд (XVIII в.), Гортензия Лепот (1723—1788), Мария Гаэтано Аньези (1718—1799). Больших успехов в развитии математики позднее достигли: Мэри Соммервиль (1780—1872), Ада Августа Байрон (1815—1852), Софья Васильевна Ковалевская (1850—1891), Эмми Нётер (1882—1935) и многие другие [55].

218. Доказать, что каждое число вида $n^4 + 4$ есть составное при $n > 1$.

Задача С. Д. Пуассона

Основные труды французского механика, физика и математика Симеона Дени Пуассона (1781—1840) относятся к теоретической и небесной механике, математической физике, интегральному исчислению, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей. Пуассону принадлежат слова: «Жизнь прекрасна тем, что ее можно посвятить изучению математики и ее преподаванию» [27].

219. Некто имеет 12 пинт (пинта — мера жидкости) и хочет отлить половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. Зато имеется два сосуда емкостью 5 и 8 пинт. Спрашивается, каким образом можно налить 6 пинт в сосуд, вмещающий 8 пинт.

Задача о восьми ферзях

Впервые задачу о восьми ферзях сформулировал в 1848 г. немецкий шахматист М. Беццель. Разумные алгоритмы поиска искомых расположений ферзей предложили Пермантье, Ла-Ное, Гюнтер, Лакьер и др. [28].

220. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу? (*Шахматный ферзь ходит по вертикалям, горизонталям и диагоналям.*)

Задача Якоба Штейнера

Штейнер

Швейцарский математик Якоб Штейнер (1796—1863) много занимался проективной геометрией и построениями, которые выполняются только с помощью прямой линии и неподвижного круга.

221. Разделить правильный пятиугольник на две равновеликие части прямой, параллельной одной из его сторон.

Задачи Э. Ш. Каталана

Основные труды бельгийского математика Эжена Шарля Каталана (1814—1894) относятся к геометрии, теории чисел и алгебре.

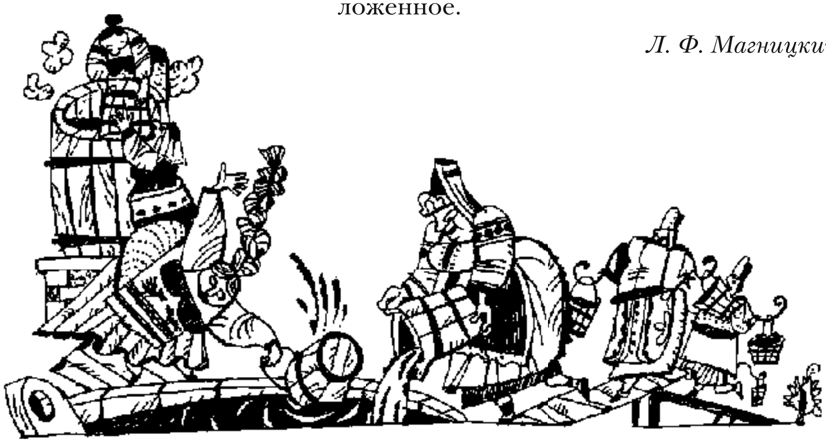
222. Из точки M, взятой вне окружности, провести секущую так, чтобы она разделилась окружностью пополам.

223. В цепочке из n букв, расположенных в заданном порядке, расставить $n - 1$ пару скобок таким образом, чтобы внутри каждой пары стояло ровно два «выражения». Этими спаренными выражениями могут быть либо две соседние буквы, либо буква и соседнее выражение в скобках, либо два соседних выражения. Сколькими способами могут быть расставлены скобки?

РОССИЯ

Арифметика или числительница есть художество честное, независимое и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохваленнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретенное и изложенное.

Л. Ф. Магницкий



Первые сведения о развитии математики на Руси относятся к IX–XII вв. (древнерусская нумерация, метрология, первые системы дробей и др.). В Древней Руси времени Ярослава Мудрого (978–1054) уже существовали общеобразовательные школы. Ценные сведения о математических знаниях содержатся в памятнике древнерусского права «Русская Правда» и в памятниках духовного содержания: «Книга святых тайн Еноха», «Шестоднев», «Толковая палея» и др.

Феодальная раздробленность и иноземное нашествие сыграли роковую роль в исторической судьбе и надолго задержали культурное и научное развитие Киевской и Новгородской Руси. Поэтому вновь математика начинает развиваться на Руси только в XVI в. после освобождения от татарского ига. В первых рукописях создается самобытная русская математическая терминология. Сохранилась рукопись XVI в. «Книга сошному письму», содержащая «статью», посвященную вычислению налога с земельной площади в «сохах». Для расчетов «сошного письма» применялись русские

Рис. 12

счеты. Арифметические рукописи XVI в. переписывались и в XVII в. и имели традиционное название «Книга рекома по-гречески арифметика, а по-немецки — алгоризма, а по-русски цифирная счетная мудрость». Первые русские рукописные книги по математике XVI—XVII вв. были вытеснены замечательной книгой Л. Ф. Магницкого «Арифметика» (1703).

Основание Петербургской академии наук (рис. 12) пришлось на время бурного расцвета математики и механики. Творчество великого Леонардо Эйлера (1707—1783), много лет проработавшего в России, охватило практически все области физико-математических знаний. Именно в XVIII в. было положено начало формирования русской математической школы. В XIX в. славу нашей Академии принесли блестящие открытия в теории чисел, теории вероятностей и математическом анализе крупнейшего отечественного ученого П. Л. Чебышёва (1821—1894) [99].

Старинная народная задача

224. Шли 7 старцев.
У каждого старца по 7 костылей,
На каждом костыле по 7 сучков,
На каждом сучке по 7 кошелей,
В каждом кошеле по 7 пирогов,
В каждом пироге по 7 воробьев.

Сколько всего?

Задача Кирика Новгородца

Первый русский математик, известный нам по имени Кирик Новгородец, написал в 1136 г. сочинение «Учение им же ведати человеку числа всех лет», т. е. «Наставление, как человеку познать счисление лет», посвященное вопросам хронологии и календаря. Кирик состоял дьяконом Новгородского Антониева монастыря, сохранившегося до наших дней [52].

225. Сколько месяцев, недель, дней и часов прожил человек, которому в 1136 г. исполнилось 26 лет?

Задача из книг новгородских писцов

226. В книгах новгородских писцов XV в. упоминаются такие меры жидкостей: бочка, насадка и ведро. Из этих же книг стало известно, что 1 бочка и 20 ведер кваса уравниваются с тремя бочками кваса, а 19 бочек, 1 насадка и 15,5 ведра уравниваются с 20 бочками и 8 ведрами. Можно ли на основании этих данных определить, сколько насадок содержится в бочке?

Задача из рукописи XVI *в.*

227. Летела стая гусей, навстречу им один гусь и рече: «Бог в помочь летети сту гусям». И гуси ему сказали: «Не сто нас гусей всей стаей летит: нас летит стая и как бы и нам еще столько, да полстолько, да четверть столько, да ты, гусь, и то было б сто гусей».

Задача из рукописи XVII *в.*

228. Четыре плотника у некого гостя нанялись двора ставити. И говорит первый плотник так: «Только б де мне одному тот двор ставити, я бы де его поставил един годом». А другой молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в два года». А третий молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в три года». А четвертый так рек: «Только бы де мне одному тот двор ставити, и я бы де его поставил в четыре года». Ино все те четыре плотника учали тот двор ставити вместе. Ино сколь долго они ставили, сочти мне.

Задача из «Счетной мудрости»

229. Идет корабль по морю, на нем мужеска полу и женска 120 человек. Найму дали 120 гривен, мущины дали по 4 алтына, а женщины дали по 3 алтына с человека. Сколько мужеска полу было и женска порознь? (*Гривна, гривенник — десять копеек, алтын равнялся трем копейкам.*)

Задачи из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого

Русский математик и педагог Леонтий Филиппович Магницкий (1669–1739) в 1703 г. опубликовал в Москве свою знаменитую книгу «Арифметика, сиречь наука числительная» (рис. 13). Эта книга была до середины XVIII в. основным учебником по математике в России. «Арифметика» Магницкого поистине была энциклопедией математических знаний и сыграла большую роль в их распространении по России. М. В. Ломоносов называл «Арифметику» Магницкого «вратами учености» наряду со «Славянской грамматикой» (1643) Мелентия Смотрицкого [44]; [84].

Рис. 13

230. Спросил некто учителя: «Скажи, сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына». Учитель ответил: «Если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня учеников 100». Спрашивается, сколько было у учителя учеников.

231. Найти число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4.

232. Один человек выпьет кадь пития в 14 дней, со женою выпьет тое же кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его особо выпьет тое же кадь.

Задача Христиана Гольдбаха

Выдающийся математик XVIII в. Христиан Гольдбах (1690–1764) был членом Петербургской академии наук, но основную часть жизни прожил в Москве. В переписке со своим другом Эйлером высказал гипотезу, известную под названием проблемы Гольдбаха: каждое целое число, большее чем 2, есть сумма трех чисел, которые либо простые, либо 1 [117].

233. Доказать, что при натуральных числах a и b сумма всех дробей вида $\dfrac{1}{(a+1)^{b+1}}$ имеет пределом единицу.

Задачи Леонарда Эйлера

Эйлер

Именем Леонарда Эйлера (1707–1783) в современной математике названы: критерий, метод, многочлены, подстановки, постоянная, преобразование, произведение, ряд, теоремы, тождества, уравнения, формулы, функции, характеристика, интегралы, углы, числа и т. п. Гений XVIII в. – Леонард Эйлер – обрел в России вторую родину и проработал в Петербургской академии наук более 30 лет. Французский математик П. С. Лаплас советовал: «Читайте, читайте Эйлера – он учитель всех нас» [119].

Ходили упорные слухи о том, что великий математик Леонард Эйлер был зачислен в Запорожское войско. Но слухи эти были основаны на недоразумении.

На деле же это относилось к его третьему сыну Христофору, состоявшему начальником Сестрорецкого оружейного завода и дослужившемуся в России до чина генерал-лейтенанта артиллерии [52].

234. Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка – по 21 талеру. Сколько лошадей и быков купил чиновник?

235. Доказать, что число $2^{2^5}+1$ делится на 641.

236. На реке Преголя, где стоит город Калининград (б. Кёнигсберг), имеется семь мостов (рис. 14). Возможно ли пройти по всем мостам, не вступая ни на один из них дважды?

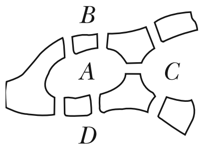


Рис. 14

237. Показать, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма четырех квадратов, является также суммой четырех квадратов:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(m^2 + n^2 + p^2 + q^2) = (an + bm + cq + dp)^2 +$$
$$+ (am - bn + cp - dq)^2 + (-ap - bq + cm + dn)^2 + (aq - bp - cn + dm)^2.$$

238. Доказать, что основания высот, основания медиан и точки, расположенные на серединах от ортоцентра до вершин треугольника, лежат на одной окружности.

239. Доказать, что во всяком треугольнике точка пересечения медиан и ортоцентр лежат на одной прямой с центром описанной окружности.

240. Определить рациональные значения x и y в уравнении $x^y = y^x$.

241. Разложить число e в цепную дробь.

Как появилось число e? Число Непера

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045...$$

служит основанием натуральных логарифмов и обозначено буквой e в честь Эйлера. Немецкий математик И. Г. Ламберт доказал в 1766 г. иррациональность числа e. В 1873 г. французский математик Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e. Натуральные логарифмы широко используются для выражения математических зависимостей разнообразных физических, химических и других процессов. В 1964 г. с помощью ЭВМ было вычислено более миллиона цифровых знаков числа e [68].

242. Среди 36 офицеров поровну уланов, драгунов, гусаров, кирасиров, кавалергардов и гренадеров и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков и подпоручиков, причем полк каждого из родов войск представлен офицерами всех шести рангов. Можно ли выстроить этих офицеров в каре 6×6 так, чтобы в любой колонне и любой шеренге встречались офицеры всех полков и всех рангов?

Задача Эйлера о 36 офицерах положила начало изучению так называемых латинских квадратов. Латинским квадратом называется квадрат $n \times n$ клеток, в которых написаны латинские буквы, притом так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются все эти буквы по одному разу. На рис. 15 изображены два латинских квадрата 5×5.

A	*B*	*C*	*D*	*E*
D	*E*	*A*	*B*	*C*
B	*C*	*D*	*E*	*A*
E	*A*	*B*	*C*	*D*
C	*D*	*E*	*A*	*B*

a	*b*	*c*	*d*	*e*
b	*c*	*d*	*e*	*a*
c	*d*	*e*	*a*	*b*
d	*e*	*a*	*b*	*c*
e	*a*	*b*	*c*	*d*

Рис. 15

Aa	*Bb*	*Cc*	*Dd*	*Ee*
Db	*Ec*	*Ad*	*Be*	*Ca*
Bc	*Cd*	*De*	*Ea*	*Ab*
Ed	*Ae*	*Ba*	*Cb*	*Dc*
Ce	*Da*	*Eb*	*Ac*	*Bd*

Рис. 16

Если эти квадраты наложить друг на друга, то все получившиеся пары букв оказываются различными (рис. 16). Такие пары латинских квадратов называются ортогональными.

243. Сколькими способами можно расставить n не угрожающих друг другу шахматных ладей на доске $n \times n$ клеток так, чтобы ни одна из них не стояла на главной диагонали? (*Шахматная ладья ходит по вертикалям и горизонталям. Главной диагональю считается диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний.*)

244. Как обойти конем все клетки шахматной доски, побывав в каждой клетке ровно по одному разу? (*Шахматный конь ходит буквой «Г».*)

245. Сколькими способами выпуклый n-угольник можно разбить на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри n-угольника?

Задачи Л. Н. Толстого

Среди любимых наук великого русского писателя Л. Н. Толстого (1828–1910) одно из самых первых мест занимала математика. Он постоянно интересовался решением различных задач. Л. Н. Толстой горячо ратовал за развитие мыслительной деятельности детей, за индивидуальный подход в обучении, особенно арифметике. Педагогическая деятельность Л. Н. Толстого в области математики была связана с организацией на свои средства школы в Ясной Поляне и изданием в 1872 г. «Арифметики» в составе «Азбуки».

246. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

247. Нынче 1872 год. Мне 43 года, а дед старше меня на 48 лет. В каком году родился дед?

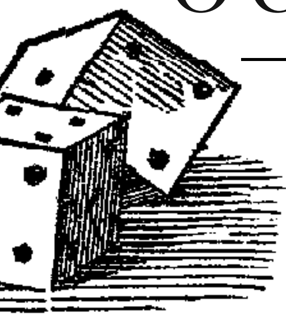
Задача, предложенная Ивану Петрову

Иван Петров – сын крестьянина, родом из деревни Рогозино Кологривского уезда Костромской губернии. Математически одаренный мальчик не умел ни читать, ни писать, но любил производить в уме всякого рода арифметические подсчеты. В мае 1834 г. одиннадцатилетний Ваня успешно выдержал устный экзамен по математике в Костромской гимназии. Ване было предложено двенадцать задач, и на все он дал правильные ответы, затратив на решение около часа.

248. Сосчитать в уме, сколькими способами можно уплатить 78 рублей, имея билеты трех- и пятирублевого достоинства.

III

ЗАДАЧИ НАУКИ О СЛУЧАЙНОМ



...И случай, бог-изобретатель...

А. С. Пушкин

Еще в глубокой древности появились различные игры. В Древней Греции и Риме широкое распространение получили игры в астрагалы (т. е. бросание костей из конечностей животных) и игральные кости (кубики с нанесенными на гранях точками). В настоящее время игральные кости иногда изготовляют в виде додекаэдров и икосаэдров. В одной из азартных (*слово «азартный» происходит от арабского «азар» — трудный, т. е. редко выпадавшие комбинации костей*) игр бросались одновременно четыре астрагала и фиксировался результат. Худший бросок, при котором выпадает более одной единицы, назывался «собакой». Лучшим исходом считали бросок «Венера», когда на четырех астрагалах выпадали различные грани. Позднее азартные игры распространились в средневековой Европе. В частности, в XIV в. появились игральные карты. В XVII в. азартные игры способствовали зарождению и становлению комбинаторики и науки о случайном. Ученые XV–XVII вв. много внимания уделили решению задач о дележе ставки, об игре в кости, лотереях и т. п. [33].

ДЕЛЕЖ СТАВКИ

...Истина одна: и в Тулузе, и в Париже.

Б. Паскаль

Задачи о дележе ставки в занимательных формулировках встречались уже в рукописных арифметических учебниках XIII в. и сводились к справедливому разделению ставки между двумя игроками, если игра прервана по каким-либо причинам.

Задачи Луки Пачоли

В энциклопедическом труде итальянского математика Луки Пачоли (ок. 1445 – ок. 1514) «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», изданном в Венеции в 1494 г., в главе «Необычайные задачи» помещено несколько задач на справедливый раздел ставки.

249. Компания играет в мяч до 60 очков и делает ставку в 22 дуката (дукат – золотая монета, которая чеканилась в Венеции). В связи с некоторыми обстоятельствами игра не может быть закончена, причем одна сторона в этот момент имеет 50, другая 30 очков. Спрашивается, какую часть общей ставки должна получить каждая сторона.

250. Необходимо разделить ставку между игроками в том случае, когда один имеет пять выигранных партий, а другой – две, договорились же играть до шести выигрышных партий.

251. Два игрока поставили по 105 ливров (ливр — серебряная монета) с условием, что общий выигрыш достанется тому, кто первый выиграет три партии. После того как первый игрок выиграл две партии, а второй — одну, игра прервалась. Спрашивается, как распределить ставки.

252. Трое соревнуются в стрельбе из арбалета (*арбалет – самострел, усовершенствованный лук*). Кто первым достигнет 6 лучших попаданий, тот выигрывает. Ставки 10 дукатов. Когда первый получил 4 лучших попадания, второй 3, а третий 2, они не хотят продолжать и решают разделить приз справедливо. Спрашивается, какой должна быть доля каждого.

Задачи Никколо Тартальи

Итальянский математик Никколо Тарталья в своей работе «Общий трактат о числе и мере» (1560) правильно указал на недостатки в решениях Пачоли. Далее Тарталья предлагает несколько своих задач на справедливое разделение ставки.

253. Играя до 60 очков, одна сторона набрала 10 очков, а другая — нуль. Как разделить ставку, если каждая сторона ставит по 22 дуката?

254. При тех же условиях (что и в задаче 253) одна сторона набрала 50 очков, а другая 30.

255. Двое играют до шести выигрышных партий. Один игрок имеет уже пять партий, а другой только три. Как разделить ставку, если игра прервана?

Задача Г. Ф. Певероне

В статье итальянского математика Г. Ф. Певероне «Два коротких и легких трактата...» (1553) также рассматривались задачи о разделении ставки.

256. A и B играют до десяти партий. A выиграл семь, а B — девять партий. Как разделить ставку?

Задачи Блеза Паскаля

До середины XVII в. не было правильных методов решения задач о справедливом дележе ставки. В 1654 г. между французскими математиками Б. Паскалем из Парижа и П. Ферма из Тулузы возникла переписка по поводу ряда задач рыцаря де Мерэ. Из переписки Паскаля и Ферма сохранилось лишь три письма Паскаля и четыре письма Ферма. Эти письма впервые были опубликованы в 1679 г. в Тулузе [96]. В этой переписке оба ученых, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Ферма со своей стороны нашел решение и для более сложного случая, когда игра происходит между произвольным числом игроков.

257. Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если один игрок выиграл две партии, а другой — одну и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

258. Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если один игрок выиграл две партии, а другой — ни одной и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

259. Как разделить ставку при игре до трех выигрышных партий, если первый игрок выиграл одну партию, а второй — ни одной и каждым вложено в игру по 32 пистоля?

Задачи Пьера Ферма

260. Пусть до выигрыша всей встречи игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?

261. Пусть до выигрыша всей встречи игроку A недостает одного очка, а двум другим (B и C) недостает по два очка. Как справедливо разделить ставку?

Задача де Мерэ

Рыцарь де Мерэ (1607—1648) был заметной фигурой при дворе Людовика XIV, увлекался философией и литературой, был знаком и состоял в переписке с некоторыми крупными математиками своего времени и одновременно был страстным игроком.

262. Два игрока условились, что выигрыш получит тот, кто выиграет определенное число партий. Игра была прервана, когда первому игроку осталось до выигрыша m, а второму n партий. Как разделить ставку, если вероятность выигрыша партии для каждого равна 0,5?

Задачи Христиана Гюйгенса

В 1655 г. в Париж приехал голландский механик, физик и математик Христиан Гюйгенс (1629—1695). Он узнал о задаче справедливого разделения ставки. В XVII в. решением подобных задач занимались многие математики.

Вскоре после возвращения в Голландию Гюйгенс самостоятельно занялся поиском метода решения таких задач. И уже в 1657 г. он опубликовал первую печатную работу под названием «О расчете в азартных играх». В предисловии Гюйгенс пишет: «Во всяком случае, я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории». Из 14 предложений своей книги Гюйгенс в предложениях 4—9 правильно решает различные задачи о справедливом распределении ставки, в том числе и между тремя игроками.

Гюйгенс — изобретатель маятниковых часов, это, пожалуй, первый человек, которому удалось точно измерить время.

Когда Гюйгенс открыл первый спутник Сатурна (Титан) и нашел, что время его обращения вокруг планеты равно 15 дням, он составил по этому поводу анаграмму и послал своим коллегам. Однако один из них, Валлис, большой мастер в расшифровке тайнописи, разгадал эту анаграмму и составил по этому поводу свою анаграмму, которую послал Гюйгенсу. Когда ученые обменялись разгадками анаграмм, то получилось так, что будто бы Валлис еще до Гюйгенса сделал то же самое открытие. Потом Валлис признался, что он пошутил, чтобы доказать бесплодность анаграмм в деле тайнописи. Гюйгенс, однако, не оценил этой шутки и рассердился... [52].

263. A играет с B с условием, что тот, кто первым выиграет трижды, получит всю ставку. И вот A выиграл уже два раза, а B

еще только один раз, и я хочу знать, как должна быть справедливо разделена ставка в случае, если оба на этом игру прекращают.

264. Игроку A недостает одной партии, а игроку B — трех партий. Как разделить справедливо ставку?

265. Игроку A недостает одной партии, а игроку B — четырех партий. Как разделить справедливо ставку?

266. Игроку A недостает двух партий, а игроку B — трех партий. Как разделить справедливо ставку?

267. Игроку A недостает двух партий, а игроку B — четырех. Как разделить справедливо ставку?

268. Игрокам A и B недостает по одной партии, а игроку C — двух партий. Как разделить справедливо ставку?

ИГРА В КОСТИ

Когда кончается игра в три кости,
То проигравший снова их берет
И мечет их один в унылой злости;
Другого провожает весь народ...

Данте Алигьери

Задачи Ричарда де Форниваль

Поэма на латинском языке канцлера кафедрального собора в Амьене Ричарда де Форниваль (1200—1250) содержала главу о спорте и играх, в частности, с игральными костями.

269. Подсчитать число возможных исходов при бросании трех игральных костей.

270. Найти число способов получения данной суммы очков на трех костях.

Задача из средневековой поэмы (*до* XV *в.*)

В 1477 г. Бенвенуто Д'Имола в Венеции издал «Божественную комедию» Данте Алигьери (1265—1321), снабдив ее комментариями. Начало VI книги «Чистилище» гласит:

Когда кончается игра в три кости,
То проигравший снова их берет
И мечет их один в унылой злости;

Другого провожает весь народ;
Кто спереди зайдет, кто сзади тронет,
Кто сбоку за себя словцо ввернет.
А тот идет и только ухо клонит;
Подаст кому, — идти уже вольней.
И так он понемногу всех разгонит.
Таков был я в густой толпе теней,
Чье множество казалось превелико,
И, обещая, управлялся с ней.

271. Подсчитать число различных возможных исходов при бросании трех игральных костей.

Заметим, что число различных исходов при одновременном бросании трех игральных костей без учета порядка было определено еще в 960 г. епископом Виболдом из города Камбрэ. Бросанию трех костей придавался религиозный смысл, а именно появление каждого набора трех чисел связывалось с одной из 56 добродетелей. Правильные подсчеты различных исходов при бросании трех костей были описаны в XI в. летописцем Балдерикусом и появились в печати лишь в 1615 г. В средневековых поэмах на латинском языке каждому из 56 различных возможных исходов при бросании трех игральных костей соответствовал определенный стих.

Задача о жулике

Однажды в Неаполе преподобный Галиани увидел человека из Базиликаты, который, встряхивая три игральные кости в чашке, держал пари, что выбросит три шестерки; и действительно он немедленно получил три шестерки. Вы скажете: такая удача возможна. Однако человеку из Базиликаты удалось это и во второй раз, пари повторилось. Он клал кости назад в чашку 3, 4, 5 раз и каждый раз выбрасывал три шестерки. «Черт возьми! — вскричал преподобный Галиани. — Кости налиты свинцом». Так оно и было.

272. Какова вероятность выпадения трех шестерок?

Задачи Джироламо Кардано

Простейшими задачами об игре в кости занимался Кардано. В рукописи «Книга об игре в кости» (1526), опубликованной лишь в 1663 г., рассматривались многие задачи, связанные с бросанием двух и трех игральных костей и выпадением на верхних гранях определенного числа очков. Кардано указывает, что азартные игры были изобретены во время десятилетней осады Трои [91].

273. При одновременном бросании двух игральных костей указать число возможных случаев появления определенного числа очков хотя бы на одной кости.

274. Указать количество случаев при бросании двух игральных костей, в которых единица или двойка появится хотя бы один раз.

275. Составить таблицу совпадения шансов при метании двух костей.

276. Решить ту же задачу для трех костей.

Задача Никколо Тартальи

Тарталья в работе «Общий трактат о числе и мере» дает общее правило выпадения различного числа очков на верхних гранях для одной (6), двух (21), трех (56) и т. д. игральных костей. Для получения чисел 6, 21, 56, ... Тарталья составляет соответственно суммы:

1) $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$;
2) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$;
3) $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$;
....

277. Найти количество различных выпадений очков на верхних гранях при одновременном бросании: 1) четырех костей; 2) n костей.

Первая игра де Мерэ

Страстный игрок в кости рыцарь де Мерэ хотел разбогатеть при помощи игры в кости, и для этого он придумывал различные усложненные правила игры. Легенда о де Мерэ подробно изложена в статье А. Я. Хинчина и А. М. Яглома «Наука о случайном».

278. Игральная кость бросается четыре раза. Рыцарь бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадет шесть очков. Какова вероятность выигрыша для рыцаря?

Вторая игра де Мерэ

279. Две игральные кости бросаются 24 раза. Рыцарь бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадут две шестерки. Какова вероятность проигрыша для рыцаря?

Задачи Галилео Галилея

Рассказывают, что однажды к итальянскому физику, механику, астроному и математику Галилео Галилею (1564—1642) явился солдат и попросил помочь ему в решении вопроса, который длительное время не давал ему покоя: что выпадает чаще при игре в кости — сумма в 9 очков или сумма в 10 очков? Может показаться, что вероятность одинакова, так как каждая сумма из 9 и 10 очков может быть представлена одним из шести способов:

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3;$$
$$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4.$$

Однако с учетом перестановок для суммы 9 очков получится 25 различных способов (6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1), а для суммы 10 очков — 27 различных способов (6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3). Как видно, вероятности этих случайных событий довольно близки между собой и равны соответственно $\frac{25}{216}$ и $\frac{27}{216}$, что и вызывало затруднения у солдата.

В работе «О выходе очков при игре в кости», опубликованной впервые в 1718 г., Галилей дал исчерпывающее решение задачи о числе всех возможных исходов при одновременном бросании трех игральных костей [115].

280. Сколькими способами можно получить ту или иную сумму очков при одновременном бросании двух игральных костей?

281. При каких выходах трех костей могут получаться все числа?

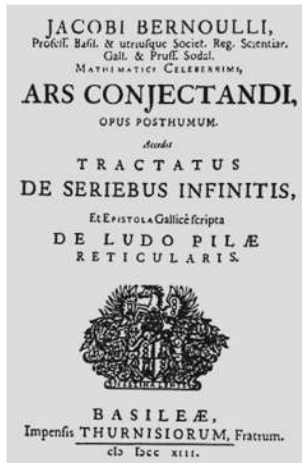
Задача Христиана Гюйгенса

282. При одновременном бросании трех игральных костей какая сумма выпавших на них очков должна появляться чаще — 11 или 12?

Задачи Якоба Бернулли

Бернулли

Новый этап в истории науки о случайном начался с Якоба Бернулли (1654—1705). В 1713 г. вышла посмертно в свет книга Я. Бернулли «Ars conjectandi» («Искусство предположений») (рис. 17). Сам Я. Бернулли еще в 1692 г. дал своей неопубликованной рукописи, хранящейся в библиотеке Базельского университета, название «De arte combinatoria» («О комбинаторном искусстве»), следуя античной традиции в использовании латинского слова ars в заглавии. (Например, Кардано опубликовал «Artis magnae» («Великое искусство», 1545), Виет — «Isagoge in artem analyticam» («Введение в аналитическое искусство», 1591), Лейбниц — «Dissertatio de arte combinatoria» («Исследование о комбинаторном искусстве», 1666).) «Искусство предположений» состоит из четырех частей. Первая часть содержит упоминавшееся сочинение Гюйгенса с развернутыми комментариями Я. Бернулли. Вторая часть книги посвящена разработке комбинаторики. В третьей части решаются разнообразные задачи науки о случайном. Четвертая часть посвящена общим соображениям о природе случайных событий и исследованию закономерностей массовых случайных явлений [83].



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
Mathematici Celeberrimi,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Рис. 17

283. Сколькими способами можно получить 12 очков при одновременном бросании четырех игральных костей?

284. Некто желает при шести бросаниях кости получить все шесть граней в таком порядке: при первом бросании одно очко, при втором — два и т. д. Как велико его ожидание?

Задача Самуэлея Пепайса

Расчетами в азартных играх занимались многие ученые и в том числе великий Исаак Ньютон. Однажды ему прислал в письме задачу Самуэль Пепайс. Последнего интересовал вопрос о предпочтительности пари при игре в кости. Ньютон дал исчерпывающее решение задачи, опираясь на формулу Я. Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ (см. приложение V).

285. Какое из событий более вероятно:

1) появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании шести костей;

2) появление хотя бы двух шестерок при подбрасывании 12 костей;

3) появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей?

Задачи Г. В. Лейбница

Важную роль в развитии комбинаторики и в появлении самого термина «комбинаторика» сыграл трактат Г. В. Лейбница «Исследование о комбинаторном искусстве». Среди комбинаторных задач Лейбница мы находим подсчет числа сочетаний, размещений с повторениями и различных исходов при одновременном бросании игральных костей.

286. Подсчитать при одновременном бросании n игральных костей количество исходов, в которых определенная грань встречается m раз.

287. Найти количество исходов (без повторений) при одновременном бросании n игральных костей, если $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Задача П. Р. де Монмора

Французский математик П. Р. де Монмор (1678—1719) в своей главной работе «Анализ азартных игр» (1707) наряду с комбинаторикой много внимания уделил рассмотрению игры в карты, игры в кости и решению различных других задач.

288. Определить число способов, которыми можно получить при бросании n костей a единиц, b двоек, c троек и т. д.

ГАДАНИЯ, ЛОТЕРЕИ, УРНЫ...

Каждый раз, когда служитель объявлял следующий номер билета, толпа отвечала громкими возгласами... По мере того как приближалась минута осуществления мечты, лихорадка, охватившая неаполитанцев, все усиливалась... больше всего досталось лотерее... где все так и устроено...

М. Серао

Задача о гаданиях

По преданию, когда-то в сельских местностях России среди девушек существовало гадание. Одна из подруг зажимала в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу, а другая связывала эти травинки попарно между собой сверху и снизу. Если при этом все шесть травинок оказывались связанными в одно кольцо, то это должно было означать, что девушка в текущем году выйдет замуж.

289. Какова вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо?

Задача о Генуэзской лотерее

В XVII в. в Генуе возникла знаменитая лотерея. Генуэзская лотерея в XVIII столетии разыгрывалась во Франции, Германии и других странах. Красочно описала генуэзскую лотерею итальянская писательница Матильда Серао (1856–1927) в новелле «Розыгрыш лотереи».

290. Разыгрывается 90 номеров, из которых выигрывают пять. По условию можно ставить ту или иную сумму на любой из 90 номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров. Если участник лотереи ставил на один номер, то он получал при выигрыше в 15 раз больше ставки; если на два номера (амбо), то в 270 раз больше; если на три номера (терн), то в 5500 раз больше; если на четыре номера (катерн) — в 75 000 раз больше; если на пять номеров (квин) — в 1 000 000 раз больше, чем ставка. Какова вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев?

Задачи Якоба Бернулли

291. Некто положил в урну два шара, белый и черный, и предложил трем игрокам премию при условии, что ее получит тот, кто первый вытянет белый шар. Первым извлекает шар A и кладет его обратно, затем вторым испытывает счастье B и, в конце, третьим — C. Какие шансы имеют эти три игрока?

292. A держит пари с B, что он вытянет из 40 игральных карт, среди которых по десять карт разной масти, четыре разномастные карты. Как относятся шансы обоих друг к другу?

Задача Абрахама де Муавра

Абрахам де Муавр был автором работ «О мере случая», «Доктрина шансов», «Аналитические этюды» и др.

293. Вероятность наступления случайного события при отдельном испытании равна p. Определить вероятность того, что в n испытаниях событие наступит подряд k раз.

Задача П. Р. де Монмора

294. Два игрока, имеющие по n ($n = 2, 3, 4$) одинаковых занумерованных билетов, извлекают одновременно билеты один за другим до тех пор, пока не извлекут одинаковый билет, тогда один из игроков выигрывает. А если такое совпадение не произойдет вовсе, то выигрывает другой игрок. Найти вероятность выигрыша каждого из этих двух игроков.

Задача Томаса Симпсона

Английский математик Томас Симпсон (1710–1761) был ткачом шелковых тканей. Математикой занимался самостоятельно. Основные труды Симпсона относятся к геометрии, тригонометрии, математическому анализу и основам теории ошибок.

295. Имеется данное число вещей различного сорта: n_1 вещей первого сорта, n_2 – второго, ..., n_k – k-го. Наудачу берутся m вещей. Найти вероятность того, что при этом будет взято m_1 вещей первого сорта, m_2 вещей второго сорта, ..., n_k – k-го.

Задача Леонарда Эйлера

296. В генуэзской лотерее выпадение номеров 49, 50, 51, 72, 73 дает секвенцию трех и двух последовательных чисел и обозначается 1 (3) и 1 (2); выпадение 13, 49, 50, 51, 72 дает секвенцию трех последовательных чисел и отдельно два изолированных числа или 1 (3) и 2 (1) и т. п. Найти вероятности k секвенций, т. е. появления в данном тираже k последовательных выигрышных чисел.

Задачи Ж. Л. Д'Аламбера

Д'Аламбер

Крестьянин Аламбер по совету полицейского комиссара назвал подкидыша Жаном Лероном в память Круглой церкви, где был найден ребенок. Позднее Жан Лерон к своему имени добавил фамилию Д'Аламбер. С именем французского математика, механика и философа Жана Лерона Д'Аламбера (1717–1783) в науке связаны принцип Д'Аламбера, признак Д'Аламбера и др. С 1751 г. он работал вместе с философом Дени Дидро над созданием «Энциклопедии наук, искусств и ремесел» (28 томов). Д'Аламбер для энциклопедии написал, в частности, статьи «Герб и решетка», «Лотерея», «Кость» и др. [47].

297. Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет орел?

298. Монета подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что орел выпадет по крайней мере один раз?

Задача Ж. Л. Д'Аламбера – П. С. Лапласа

Французский астроном, математик и физик Пьер Симон Лаплас (1749–1827) активно участвовал в реорганизации высшего образования во Франции, руководил введением метрической системы мер. Научное наследие Лапласа связано с небесной механикой, алгеброй, математическим анализом, теорией вероятностей, математической физикой [25].

299. Слово «Константинополь» составлено из букв А, И, К, Л, Н, Н, Н, О, О, О, П, С, Т, Т, Ь. Какова вероятность случайного составления этого слова из перечисленных букв?

Задача М. В. Остроградского

Основные труды русского математика Михаила Васильевича Остроградского (1801–1861) относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике. Остроградский также успешно занимался теорией чисел, алгеброй и теорией вероятностей [34].

300. В урне имеется a белых и b черных шаров. Какова вероятность того, что из n извлеченных шаров будет c белых и d черных?

IV

ИНТЕРЕСНОЕ О ВЕЛИКИХ

...И гений парадоксов друг...

А. С. Пушкин

Математикам без шуток «...жить нельзя на свете, нет». Поэтому математики шутки ценят и любят. «Шуточные примеры часто имеют больше значения, чем полезные», — считал немецкий математик М. Штифель. «Предмет математики настолько серьезен, что, — советовал французский философ, писатель, математик и физик Б. Паскаль, — полезно не упускать случая делать его немного занимательным». «Хорошая математическая шутка лучше дюжины посредственных работ», — писал английский математик Дж. Литлвуд.

Мы всегда помним, что за веселой шуткой кроется и серьезное. В этой главе серьезное и шуточное идут постоянно рядом. С другой стороны, именно в математической шутке особенно ярко выступает наиболее существенное и характерное в жизни ученых-математиков.

В этой главе собраны и систематизированы: остроумные шутки математиков, забавные эпизоды из их жизни, замечательные и занимательные мысли и дела ученых, очерки-миниатюры, необычные случаи на лекциях и экзаменах, краткие диалоги, ответы на вопросы, нетривиальные суждения и т. п.

«Вода есть начало всего»

Так считал Фалес Милетский. Фалес предсказал солнечное затмение 585 г. до н. э. Он считался одним из «семи мудрецов». Фалесу принадлежит знаменитый тезис: «Познай самого себя».

Рассказывают, что однажды Фалес, наблюдая звезды, упал в колодец и красивая фракийская рабыня посмеялась над ним:

«Хочет знать, что делается на небе, а что у него под ногами, не видит».

Когда Фалеса спросили, какую награду он хотел бы получить за свое открытие в астрономии, мудрец ответил: «Для меня достаточно, если, рассказывая о моем открытии другим, вы будете говорить, что это мое открытие, а не ваше».

«Число есть сущность всех вещей»

В школе Пифагора процветала числовая мистика. Пифагор учил: «число есть сущность всех вещей». Даже на вопрос о том, что такое дружба? — Пифагор ответил: «Это то же, что и отношение между числами 220 и 284». Эти числа пифагорейцы называли дружественными, так как у них одинаковая сумма натуральных делителей (504).

Самым крупным достижением в математике было открытие иррациональных чисел. Древняя легенда гласит, что в течение ста лет это открытие хранилось в строгой тайне и что пифагорец Гиппас, раскрывший ее непосвященным, был жестоко наказан за это богами — утоплен в море.

Как купец стал геометром

Однажды незадачливый купец Гиппократ Хиосский был ограблен пиратами. В поисках управы на них он отправился в Афины и встретил там мудрецов, которые с увлечением занимались решением геометрических задач. Управы на грабителей Гиппократу найти не удалось и он утешился решением геометрических задач, превзойдя искусных мудрецов. Поиски решения квадратуры круга привели его к квадратуре трех так называемых гиппократовых луночек.

Образец истинной дружбы

У неоплатоника Ямвлиха (ок. 250–325) рассказывается о необыкновенной дружбе пифагорейцев из Сиракуз Дамона и Финития. Когда Финитий был приговорен к смертной казни за покушение на жизнь Дионисия II, он для устройства своих семейных дел отпросился на короткий срок, оставив вместо себя в качестве заложника своего друга Дамона. Но непредвиденные обстоятельства помешали Финитию вернуться вовремя. Дамон уже готов был принести себя в жертву вместо друга и тут в последний момент появляется запыхавшийся Финитий. Дионисий простил Финития и лишь, восторгаясь ими, высказал пожелание быть их общим другом, но неожиданно получил отказ.

«В геометрии нет царского пути!»

Однажды на вопрос царя Птолемея I Сотера (305–283 до н. э.), не существует ли более короткого пути для изучения геометрии, чем штудирование «Начал», – Евклид сказал в ответ: «В геометрии нет царского пути!» В Египте же того времени были две системы дорог: одна для царя и его курьеров, другая для всего населения.

Созвездие Волосы Вереники

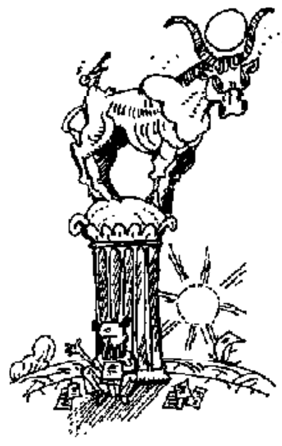
Из биографии Архимеда хорошо известно, что он состоял в дружбе и переписке с крупнейшими александрийскими учеными и в том числе с астрономом и математиком Кононом Самосским

(III в. до н. э.). Когда в 246 году до н. э. египетский властитель Птолемей III Эвергет отправился в далекий поход на Антиохию и начал третью Сирийскую войну, его верная супруга красавица Вереника, молясь за благополучное окончание похода, принесла в жертву богам свои роскошные волосы, опускавшиеся ниже пояса. Через некоторое время после успешного окончания похода оказалось, что ее волос в храме нет. Тогда галантный придворный астроном Конон Самосский заявил, что эти волосы были помещены богами на небе в качестве нового созвездия Волосы Вереники.

Арифметическая эпиграмма

Текст эпиграммы объемом в одну страницу впервые случайно обнаружил в библиотеке Вольфенбюттеле и опубликовал в 1773 г. немецкий писатель и критик Лессинг (1729–1781). Эпиграмма имела заголовок:

Задача, которую Архимед нашел в эпиграммах и послал на разрешение занимающимся подобными вопросами Александрийским ученым в послании к Эратосфену Киренскому» [2, с. 372].



Уже первые две строки представляют многозначительный вызов друзьям-соперникам:

«Сколько у Солнца быков, найди для меня, чужестранец. (Ты их, подумав, считай, мудрости если не чужд)...» [2, с. 372].

Далее в задаче речь идет о четырех цветах быков и соответственно коров. Еще более многозначительны заключительные строки задачи:

«Если ты это найдешь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты все до конца превзошел» [2, с. 373].

Задача сводится к решению системы из семи линейных уравнений с восемью неизвестными при двух дополнительных условиях, а это в свою очередь — к решению неопределенного уравнения второй степени с двумя неизвестными:

$$x^2 - 4\,729\,494y^2 = 1,$$

кроме тривиального $x = 1$, $y = 0$. Искомые восемь неизвестных выражаются числами порядка более чем 200 000 цифровых знаков. Как видно, Архимед сознательно сделал исключительно серьезно-шутливый вызов друзьям-соперникам, послав задачу, которая физически не могла быть решена в то время. И лишь в 1965 г. «Задача Архимеда о быках» была, наконец, решена в США с помощью ЭВМ Вильямсом, Германом и Зарнке.

Невероятно, но факт

Однажды римский математик и астроном Асклетарион (I в.) предсказал императору Доминициану насильственную смерть и не менее печальную участь себе — быть съеденным собаками.

Желая доказать на деле ложность предсказания ученого, император приказал немедленно умертвить предсказателя судеб и сжечь его на костре. Однако проливной дождь погасил уже пылавший костер и труп Асклетариона был действительно съеден собаками. Впоследствии сбылось предсказание Асклетариона и относительно Доминициана.

«Знание – самое превосходное из владений»

Среднеазиатский ученый энциклопедист Абу Райхан Мухаммад ибн Ахмад ал-Бируни (973–1048) был автором около 150 научных работ. Свой главный труд «Канон Мас'уда по астрономии и звездам» (ок. 1037) ал-Бируни посвятил сыну Махмуда Газневи Мас'уду. Султан в знак благодарности послал ученому слоновый вьюк чистого серебра, на что ал-Бируни ответил: «Этот груз удержит меня от науки, мудрые же люди знают, что серебро быстро уходит, а наука остается. Я исхожу из велений разума и никогда не продам вечное, непреходящее знание за кратковременный мишурный блеск».

«Никакой учитель в мире не научит ничему»

Ибн Сина (Абу Али ал-Хусейн) (980–1037) всю жизнь скитался по караванным путям. Хусейн родился накануне самого большого праздника – Михраджана. Маленький Хусейн был очень любопытным мальчиком. Не научившись ходить, он уже умел разговаривать. В доме у родителей Хусейна часто собирались гости. Однажды, когда в гости пришел дядя, все были удивлены тем, как читает стихи маленький Хусейн. Дядя решил процитировать строки из стихов арабского поэта Рудаки.

«Тех, кто, жизнь прожив, от жизни не научится уму», – сказал он и вдруг забыл следующую строку. И тут маленький Хусейн продолжил:

«Никакой учитель в мире не научит ничему».

«Да-да, именно так у великого Рудаки», – сказал дядя...

Своеобразная страсть

Арабский математик Маймон Рашид известен как комментатор «Начал» Евклида. Его страсть к «вечной книге» была так велика, что он одно предложение из «Начал» всегда носил вышитым на рукаве своего платья.

Педагогические прогулки

В Средние века для воспитания образованных людей было написано несколько книг, содержавших начальные сведения о семи «свободных искусствах», которые разделялись на тривиум (грамматика, риторика, диалектика) и квадривиум (арифметика, геометрия, астрономия, музыка). В арифметике давалось изложение без доказательства простейших свойств чисел в комбинации с числовой мистикой. Геометрия включала краткие сведения об основных геометрических образах и мерах. Даже в средневековых университетах студенты часто доходили не далее нескольких предложений первой книги «Начал» Евклида.

Пятое предложение этой книги о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника в XIII в. называлось «бегством убогих». А теорему Пифагора называли «теоремой ослов», так как учеников, не способных эту теорему понять и поэтому заучивавших ее наизусть, называли «ослами». Для нерадивых учеников в Средние века и позже как дар святого духа прославлялось действие розги. А поэтому специально четыре раза в год предусматривались прогулки с учениками в лес для заготовки прутьев для розг.

Слава астролога

Джироламо Кардано по роду службы приходилось составлять гороскопы. Однажды Кардано составил гороскоп на самого себя, причем звезды показали ему, что он умрет 75 лет от роду. И действительно он умер 21 сентября 1576 г., не дожив трех дней до своего 75-летия. Родилась легенда, согласно которой якобы Кардано, предсказавший свою смерть на известный год, месяц и день, уморил себя голодом, отдав, как говорили, жизнь за астрологию.

Математический триумф

Рассказывают, что в октябре 1594 г. придворный французский математик Франсуа Виет находился с Генрихом IV в Фонтенбло. Во время разговора между королем и посланником Республики Соединенных Нидерландов о наиболее замечательных людях последний заметил, что во Франции, видимо, нет стоящих математиков, так как его соотечественник Андриен Ван Роумен (1561—1615) среди тех, кому он адресовал свой вызов, не упомянул ни одного французского ученого. «И все же у меня есть математик и весьма выдающийся, — ответил Генрих IV. — Позовите Виета». Когда явился Виет, посланник подал ему письмо Ван Роумена. В письме предлагалось решить уравнение 45-й степени:

$$45x - 3795x^3 + 95\,634x^5 - 1\,138\,500x^7 + 7\,811\,375x^9 - 34\,512\,075x^{11} + \\ + 105\,306\,075x^{13} - 232\,676\,280x^{15} + 384\,942\,375x^{17} - 488\,494\,125x^{19} + \\ + 483\,841\,800x^{21} - 378\,658\,800x^{23} + 236\,030\,652x^{25} - 117\,679\,100x^{27} + \\ + 46\,955\,700x^{29} - 14\,945\,040x^{31} + 3\,764\,565x^{33} - 740\,259x^{35} + \\ + 111\,150x^{37} - - 12\,300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a,$$

в частности, при

$$a = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}}.$$

Для облегчения решения Ван Роумен сообщал ответы, которые получаются при других значениях a (например, значению $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ соответствует решение $x = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$).

Виет прочел письмо и тотчас же написал решение. Виет увидел, что a есть сторона правильного 15-угольника, вписанного в круг радиуса 1, или же хорда дуги в 24°, а по коэффициентам первого и последнего членов заключил, что x есть хорда $\frac{1}{45}$ этой дуги. Посланник, вскрыв в своей резиденции в присутствии нотариуса запечатанный конверт с решением самого Ван Роумена, убедился в справедливости решения Виета и на следующий день подтвердил это, а Виет, в свою очередь, прислал еще 22 других корня уравнения, неизвестных Ван Роумену, и указал на ошибку в условии задачи. Заметим, что недостающие еще 22 сопряженных корня Виет, по обыкновению своего времени, не принимал во внимание.

Уже в 1595 г. Виет опубликовал сочинение «Ответ на задачу, которую предложил для решения всем математикам мира

Андриан Ван Роумен». Здесь Виет указывает еще второй способ решения уравнения 45-й степени, сводящийся к решению системы:

$$\begin{cases} 3z - z^3 = a, \\ 3y - y^3 = z, \\ 5x - 5x^3 + x^5 = y. \end{cases}$$

Вскоре Виет в свою очередь предложил Ван Роумену решить знаменитую задачу Аполлония Пергского (ок. 260—190 до н. э.), т. е. построить циркулем и линейкой окружность, касающуюся трех данных окружностей. После того как Ван Роумен эту задачу решить не смог, Виет указал своему сопернику изящное геометрическое построение. Потерпев второе поражение, Ван Роумен специально приехал в Париж, чтобы познакомиться с ученым, и стал ревностным почитателем таланта Виета [103, с. 18—20].

Доказательство виновности

Шотландский математик Джон Непер (1550—1617) был известен не только как изобретатель логарифмов, но имел еще репутацию мага и колдуна.

Однажды у него дома в Гартнесе случилась пропажа. Все подозрения пали на слуг, но у хозяина не было никаких данных обвинить кого-либо наверняка. И тогда Непер заявил, что его черный петух обладает способностью раскрыть своему хозяину тайные мысли людей. По указанию Непера каждый слуга должен был войти в темную комнату и дотронуться рукой до сидящего там черного петуха. При этом всем слугам было сказано, что петух закричит, если до него дотронется вор. Однако петух во время этой своеобразной «тестовой» проверки так и не закричал и тем не менее Непер легко определил вора, так как он предварительно обсыпал петуха золой и чистые пальцы одного из слуг явились убедительным доказательством его виновности [39, с. 57].

Женитьба Кеплера

Когда Иоганн Кеплер в 1613 г. решил жениться во второй раз и закупал вино для свадьбы, он был изумлен тем, как торговец определял вместимость бочки. Виноторговец брал палку с делениями и с ее помощью измерял расстояние от наливного отверстия до самой дальней точки бочки — края днища. Проделав одно такое измерение, торговец быстро определял количество вина в данной бочке. Ученого заинтересовало, насколько точно виноторговец определял объем бочки. «Я как новобрачный счел для себя подходящим, — писал Кеплер, — взять новый предмет математических занятий и исследовать геометрические законы такого удобного в домашнем хозяйстве измерения и выяснить его основания, если таковые имеются». Этим интересом ученый обратил внимание на класс задач, исследование которых привело к созданию интегрального исчисления. Результатом поисков Кеплера стал трактат «О стереометрии винных бочек, преимущественно австрийских и имеющих наивыгоднейшую форму» (1615) [7].

Знакомство «сеньора де Перрон»

10 ноября 1618 г. в голландском городе Бреде в жизни молодого военного офицера Рене Декарта произошло событие, оказавшее огромное влияние на всю дальнейшую жизнь. Случай свел его с доктором медицины из Миддельбурга Исааком Бекманом (1588—1637). Декарт и Бекман встретились на улице около афиши, в которой, по обычаям того времени, был вызов решить трудную математическую задачу.

Декарт обратился к стоявшему рядом человеку с просьбой перевести условие задачи на латинский или французский язык. Незнакомец согласился перевести предлагаемую задачу на французский язык, но с условием, что молодой человек, решив задачу, будет любезным сообщить его по такому-то адресу на имя Бекмана. Каково же было удивление ученого, когда уже на следующий день утром он получил от «сеньора де Перрон» полное решение задачи. (Дело в том, что при знакомстве с Бекманом Декарт представился как «сеньор де Перрон»; этот титул он сохранял всю жизнь и его происхождение связано с названием поместья, полученного в наследство.) Из этого случайного знакомства родилась долгая и плодотворная дружба ученых [77].

Самооценка Ферма

Из биографий Декарта и Ферма известно, что спор между ними разгорелся именно в связи с решением задачи о касательных и продолжался до конца жизни Декарта. Ферма называл этот спор «небольшой войной против Декарта», а Декарт — «маленьким математическим процессом» против Ферма. В дни наиболее яростных атак Декарта на Ферма последний в письме к их посреднику Марину Мерсенну (1588—1648) шутливо писал: «Как бы низко ни ставил меня Декарт, мое собственное мнение о себе гораздо скромнее» [77].

«Второй вызов математикам»

В 1657 г. Пьер Ферма сначала поставил проблему целочисленного решения уравнения

$$Nx^2 + 1 = y^2, \qquad (*)$$

где N — целое неквадратное число, перед соотечественником Френиклем де Бесси (ок. 1602—1675), а затем, согласно тогдашнему обычаю, предложил ее в открытом письме всем современным математикам. Последнее письмо получило название «Второй вызов математикам». Весьма сложное решение удалось найти английским математикам: Джону Валлису (1616—1703) и лорду Уильяму Броункеру (1620—1684). По поводу уравнения (*) разгорелась интересная дискуссия, которая была издана Валлисом в 1658 г. под названием «Недавняя переписка о некоторых математических вопросах». Из этой переписки видно, что английские математики не смогли решить уравнение (*) для коэффициентов, предложенных Ферма, а именно, $N = 109$, 149 и 433. Ферма специально подобрал такие коэффициенты, чтобы проверить, действительно ли владеют его коллеги общим методом решения уравнения (*). Уравнением (*) много занимался Эйлер и он же по недоразумению связал его с именем английского алгебраиста Джона Пелля (1611–1685). С тех пор проблема получила ошибочное наименование «уравнение Пелля», хотя правильнее было бы называть уравнение (*) уравнением Ферма. Наконец, эффективное решение уравнения (*) и исчерпывающее его исследование было дано французским математиком Ж. Л. Лагранжем (1736–1813) [19, с. 75–76].

Развлечение кардинала и изобретение арифмометра

Однажды могущественному кардиналу Ришелье захотелось развлечься необычным образом. Ему пришла идея, чтобы модную тогда трагикомедию Скьюдери «Тираническая любовь» разыграла специально подобранная любительская труппа молоденьких очаровательных девушек. 3 апреля 1639 г. в одном из парижских театров состоялась премьера спектакля. Кардинал прибыл со свитой, театр был переполнен, спектакль удался на славу. В этот вечер особенно блистала юная Жакелина — младшая сестра Блеза Паскаля. Жакелина покорила изысканную публику своим обаянием, красотой и игрой, вызывая то и дело бурное одобрение зрителей и самого кардинала. Удовлетворенный исполнением своей необыкновенной фантазии, по окончании спектакля кардинал прошел за кулисы, чтобы выразить свое восхищение юным артистам. И тут перед кардиналом предстала Жакелина. Осмелев, она неожиданно обратилась к фактическому правителю Франции при короле Людовике XIII со словами: «Не изумляйтесь, несравненный Арманд, что я так плохо удовлетворила вашему слуху и зрению. Моя душа находится под влиянием мучительной тревоги. Чтобы сделать меня способной нравиться вам, возвратите из изгнания моего несчастного отца; спасите невинного. Этим вы возвратите свободу моему духу и телу, голосу и телодвижениям». Изумившись еще больше, кардинал приподнял юницу и расцеловал. «Дитя мое, я сделаю для вас все, что вы хотите».

Дело в том, что за год до этого отец – Этьен Паскаль (1588–1651) стал одним из вожаков группы, пострадавшей от сокращения французским правительством ренты с капиталов. Ришелье не терпел никаких возражений и поэтому отдал приказ об аресте Этьена Паскаля. Последнему пришлось бежать из Парижа и скрываться от вездесущих ищеек кардинала. Вскоре после спектакля беглецу было разрешено вернуться и он был назначен на должность интенданта в Руане. Этьен Паскаль, занимаясь взысканием налогов, зачастую на глазах сына Блеза просиживал ночи над подсчетами многочисленных сумм. Юный Блез, желая облегчить труд отца, усиленно занялся конструированием суммирующей машины. Окончательная модель счетной машины была создана, наконец, в 1642 г. Всего же было изготовлено более 50 экземпляров машин Паскаля. Некоторые из них сохранились до сих пор [87, с. 61–62].

Заметим, что еще в 1623 г. попытка механизировать арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления была предпринята астрономом и картографом, ориенталистом и математиком, профессором Тюбингенского университета Вильгельмом Шикардом (1592–1635). Ни одного экземпляра «арифметической машины» Шикарда не сохранилось, хотя реконструированные счетные машины Шикарда демонстрируются в ратуше Тюбингена.

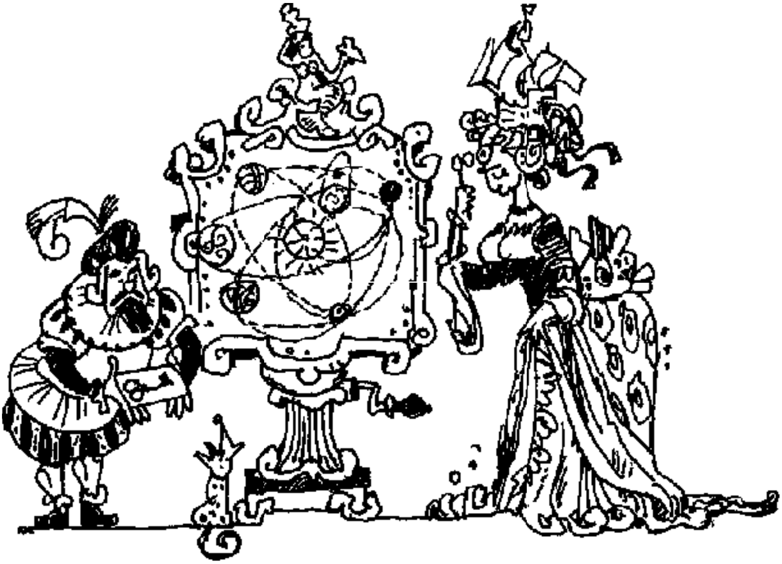
Наконец, в конце 60-х годов прошлого века случайно в пригородном дворце испанских королей в Эскориале близ Мадрида был найден цветной рисунок титана эпохи Возрождения Леонардо да Винчи с изображением 13-разрядного арифметического устройства. Предприимчивые американцы по этому рисунку изготовили действующую модель, а сам рисунок взяли в качестве эмблемы для компьютеров фирмы IBM.

Шутливое замечание

Как уже отмечалось (с. 84), в 1654 г. между французскими математиками Б. Паскалем из Парижа и П. Ферма из Тулузы возникла переписка по поводу ряда задач рыцаря де Мерэ. В этой переписке оба ученых, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена. Совпадение результатов великих ученых при решении задачи о дележе ставки послужило Паскалю поводом шутливо заметить уже в первом письме к Ферма от 29 июля 1654 г.: «Как я вижу, истина одна: и в Тулузе, и в Париже».

Прихоть голландской королевы

Известно, что в 1680 г. Христиан Гюйгенс работал над «планетной машиной», т. е. исполнял желание королевы иметь в своем кабинете модель Солнечной системы. Гюйгенс задумал воспроизвести движение планет при помощи сцепления множества зубчатых колес. Отношение числа зубцов одного колеса к другому должно было равняться отношению времен оборотов вокруг Солнца соответствующих двух планет. Перед ученым воз-



никла задача замены в таких отношениях больших числителей и знаменателей рациональными дробями с меньшими числителями и знаменателями. Так Гюйгенс пришел к непрерывным дробям и показал, что числители и знаменатели подходящих дробей взаимно простые числа и что подходящие дроби являются наилучшими приближениями. О созданной ученым модели Солнечной системы нам напоминают механические часы. Гюйгенс построил также первые часы с маятником в 1657 г. и написал замечательную книгу «Маятниковые часы» (1673) [110].

Диалог на экзамене

Учитель Ньютона и его предшественник по кафедре в Кембриджском университете английский математик, филолог и богослов Исаак Барроу (1630—1677) в детстве не проявлял интереса к учебе. В юношеские годы Исаак отличался веселым нравом и необыкновенным трудолюбием. Однажды на экзамене между капелланом и студентом Барроу произошел следующий диалог:

К а п е л л а н: Что такое вера?

Б а р р о у: То, чего не видишь.

К а п е л л а н: Что такое надежда?

Б а р р о у: Великое дело.

К а п е л л а н: Что такое любовь?

Б а р р о у: Большая редкость.

Дерзкие ответы Барроу возмутили капеллана и он сообщил об этом епископу. Однако у епископа ответы Барроу вызвали лишь улыбку и тем самым инцидент был исчерпан.

Обед Ньютона

Исаак Ньютон отличался исключительной рассеянностью. Погруженный в научные размышления, он часто мог ничего не замечать вокруг себя. Утром, вставая с постели и задумавшись о чем-нибудь, он мог, как зачарованный, просидеть до тех пор, пока кто-нибудь не выводил его из этого состояния. Увлекшись какой-либо работой, Ньютон мог совершенно забыть о пище.

Однажды к Ньютону на обед пришел его близкий друг. В самый последний момент, когда жареная курица уже была подана на стол, Ньютон поспешил в свой рабочий кабинет и там застрял, забыв о друге и предстоящем обеде. Так как Ньютон довольно долгое время не появлялся, то друг поел один и обглоданные кости сложил на блюде, а сверху накрыл серебряным колпаком. Вскоре явился Ньютон и громко объявил, что он очень проголодался. Однако с изумлением обнаружив на блюде одни обглоданные кости, ученый, ничего не подозревая, воскликнул: «Интересно, оказывается, я уже пообедал. Вот ведь как можно ошибаться!» [113, с. 112–113].

Речь в палате лордов

Ньютону за научные заслуги было пожаловано звание лорда, и он целых 26 лет скучал на заседаниях палаты лордов. Но однажды великий ученый все-таки попросил слова, вызвав немалое удивление присутствующих.

«Господа, — торжественно обратился он к собранию, — если вы не возражаете, я попросил бы закрыть окно. Очень дует, а я боюсь простудиться». И закончив свою столь короткую речь, лорд Ньютон с достоинством сел на свое почетное место.

Рассеянность Ньютона

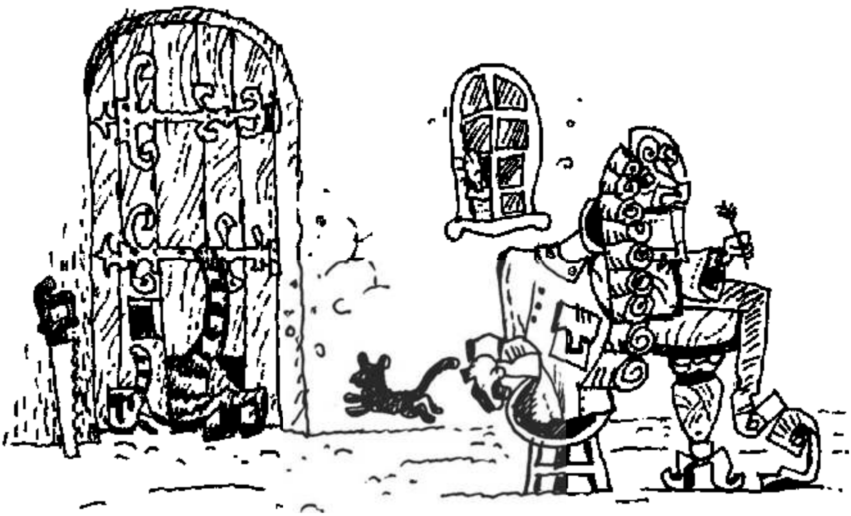
Из-за своей рассеянности Ньютон частенько попадал в смешные ситуации.

Однажды, задумав сварить яйцо, он все тщательно продумал, но ошибся лишь в одном: взял в руки яйцо, а часы положил в кастрюлю с водой.

Странное письмо

Ньютону принадлежит короткое забавное письмо, отправленное им другу — офицеру: «Здесь рассказывают, что в двух битвах ты одержал победу, но как будто в третьей был убит. Напиши, правда ли это? Ты ведь знаешь, как сильно бы огорчила меня твоя смерть».

Оригинальное решение бытовой проблемы



Ньютон очень не любил отвлекаться от своих любимых занятий, особенно по бытовым мелочам. Чтобы выпускать и впускать свою кошку, не подходя каждый раз к двери, он прорезал в ней специальную дыру. Когда же у кошки родились котята, Ньютон для каждого котенка проделал в двери еще по одному отверстию.

В книжной лавке

Готфрид Вильгельм Лейбниц имел мало внушительную внешность и поэтому производил впечатление довольно невзрачного человека. Однажды в Париже он зашел в книжную лавку в надежде приобрести книгу своего знакомого философа. На запрос посетителя об этой книге книготорговец, осмотрев его с головы до ног, насмешливо бросил: «Зачем она вам? Неужели вы способны читать такие книги?» Не успел ученый ответить, как в лавку вошел сам автор книги со словами: «Великому Лейбницу привет и уважение!» Продавец никак не мог взять в толк, что перед ним действительно знаменитый Лейбниц, книги которого пользовались большим спросом среди ученых [109].

Фанатизм венецианцев

Лейбниц любил путешествовать. Однажды он отправился из Венеции на лодке на остров Мезолу в Адриатическом море. Когда поднялась страшная буря, рулевой решил, что их единственный пассажир — безбожник и что именно он — причина бури. С предположением рулевого немедленно согласились все матросы, громко рассуждавшие о том, что необходимо немедленно бросить иностранца в воду. Но Лейбниц, знавший итальянский язык и фанатизм венецианцев, быстро все понял. Не подавая вида, он достал из кармана четки и, шепча молитву, стал усердно их перебирать. «Своеобразная шутка» Лейбница сработала, так как матросы сразу перестали считать своего пассажира безбожником. А заметно успокоившееся вскоре море помогло путешественнику без особых приключений достичь желанного острова [109].

Размышления о женитьбе

Как известно, Лейбниц всю свою жизнь прожил холостым. Однажды уже в пятидесятилетнем возрасте он все-таки сделал предложение одной даме, но та попросила его немного подождать. И когда дама согласилась на брак, Лейбниц ей признался: «До сих пор я воображал, что жениться всегда успею, а теперь, оказывается, опоздал» [109].

Смерть во сне

Абрахам де Муавр был выходцем из Франции, прожил долгую жизнь в Англии и умер в Лондоне. Однажды, незадолго до смерти, Муавр заявил, что ему необходимо ежедневно увеличивать время сна на 10—15 минут. Достигнув, таким образом, в сумме продолжительность сна более 23 часов, он на следующие сутки проспал все 24 часа и умер во сне.

Лекции для маркиза

Швейцарский математик Иоганн I Бернулли (1667–1748) после успешного окончания Базельского университета, путешествуя по Европе, в 1690 г. приезжает в Париж. В литературном салоне философа Никола Мальбранша (1638–1715) Иоганн знакомится с французским математиком маркизом Гийомом Франсуа Антуаном де Лопиталем (1661–1704). В ходе оживленной беседы Лопиталь удивился, как легко, «как бы играя», юнец Бернулли решал трудные задачи по новому исчислению. Поэтому Лопиталь попросил его прочитать ему несколько лекций. Устные беседы понравились Лопиталю и он за приличный гонорар стал получать материал в письменном виде. Заметим, что общеизвестное теперь «правило Лопиталя» для раскрытия неопределенностей было также передано ему Иоганном. Уже в 1696 г. появился знаменитый трактат Лопиталя «Введение в анализ бесконечно малых для понимания кривых линий». Вторая часть курса, изложенного Иоганном I Бернулли, была опубликована лишь в 1742 г. и называлась «Математиче-ские лекции о методе интегралов и другие; написаны для знаменитого маркиза Госпиталия; годы 1691–1692». В 1921 г. были обнаружены рукописные копии лекций, написанные рукой Иоганна I Бернулли, оригиналы которых были переданы Лопиталю в 1691–1692 гг. Из них ученые неожиданно обнаружили, что Лопиталь в своем «Анализе» почти не отступал от лекций своего молодого учителя.

Потомки заключают мир

Научная общественность XVIII в., как известно, разделилась на два лагеря по вопросу о приоритете изобретения дифференциального и интегрального исчисления.

Английский математик Брук Тейлор (1685–1731) был сторонником Ньютона, а швейцарский математик Иоганн I Бернулли поддерживал Лейбница. Тейлор и Бернулли и сами активно работали над проблемами создания нового исчисления. Тейлор в своей основной работе «Метод приращений» (1715), ссылаясь лишь на Ньютона, затронул вопросы, которые были исследованы Бернулли и другими математиками. В ответной публикации в виде анонимного эссе Бернулли обвинил Тейлора в плагиате. Распознав автора, Тейлор в своем анонимном сочинении, оправдывая себя, указал на математическую ошибку, допущенную Бернулли несколько ранее. Пока Тейлор и Бернулли продолжали свой жестокий спор, их общий друг французский математик Пьер Ремо де Монмор несколько раз пытался примирить ученых. Даже преждевременная смерть Тейлора в 1731 г. и смерть двух жен при родах не остановила гнева Бернулли: «Тейлор мертв. Судьбе было угодно, чтобы мои противники умерли раньше меня, хотя они все были моложе. Он был шестым из числа тех, что умерли за последние 15 лет... Все они нападали на меня, хотя я не сделал им ничего плохого. Кажется, сами небеса мстят за меня» [78, с. 127].

И вот, наконец, 275 лет спустя, благодаря усилиям историка математики Леоноры Фейгенбаум из Тафтского университета, редактора избранных писем Тейлора, стало возможным мирное завершение старого спора. 7 июля 1990 г. в замке эпохи Ренессанса Ремо в пригороде Парижа, где производятся шампанские вина, Франсуа Кромбе (потомок П. Р. де Монмора) и Элен Кромбе охотно раскрыли двери Фейгенбаум и потомкам противоборствующих математиков. Тейлора представлял Чалмерс Е. Ф. Тренч из Слейна (Ирландия), а Бернулли – Рене Бернулли из Базеля (Швейцария). В салоне замка Ч. Тренч и Р. Бернулли обменялись дружелюбными тостами, выпив по бокалу шампанского, и пальмовыми ветвями, которые любезно предоставила племянница Тренча. Затем они вышли из старинного замка, прошли через подъемный мостик над рвом, в яме на опушке леса «похоронили топор вражды» (предоставленный Фейгенбаум) и заключили мир!

Почетное возвращение

Христиан Вольф, будучи передовым профессором в университете города Галле, в 1723 г. был обвинен в атеизме и поэтому под угрозой виселицы вынужден был бежать в город Марбург. Здесь он, к слову сказать, был руководителем научной подготовки М. В. Ломоносова. И лишь через 17 лет, когда на смену прусскому королю Фридриху I пришел Фридрих II, ученому было разрешено вернуться в Галле. Любимого профессора с большими почестями везли в карете 50 студентов в сопровождении трубачей при восторженной встрече населения всего города [46, с. 410].

Забавное знакомство

Даниил Бернулли (1700–1782) – второй сын Иоганна I Бернулли с детских лет занимался математикой под руководством отца и, по словам Лейбница, уже с малых лет «бернулличает». Вместе со своим отцом и дядей Якобом Бернулли Даниил составляет тройку самых выдающихся представителей математической династии Бернулли.

При возвращении в 1733 г. из Петербурга в Швейцарию в почтовой карете у Даниила завязалась беседа научного характера с незнакомым молодым попутчиком. Последний поинтересовался, как зовут столь искушенного в точных науках его спутника. Когда же тот назвал себя – Даниил Бернулли, молодой человек, прекрасно осведомленный об известном в ученом мире академике, принял это за шутку и в том же тоне ответил: «А я – Исаак Ньютон!» Однако велико же было удивление адъюнкта Парижской королевской академии наук, когда он узнал, что его столь моложавый на вид и особо ничем не примечательный собеседник действительно был Даниил Бернулли [36, с. 236].

Бессонница Эйлера

Рассказывают, что однажды Леонард Эйлер во время бессонницы вычислил шестую степень первых 100 чисел, а результаты повторил на память через много дней. В другой раз Эйлер, испытывая полученный им ряд, вычислил в течение часа первые 20 десятичных знаков числа π [111, с. 182].

Диалог Эйлера

В 1741 г. Эйлер, по приглашению Фридриха II, приезжает из Петербурга в Берлинскую академию наук. Ученого приняли с большими почестями. На одном из королевских приемов во дворце мать короля обратила внимание Эйлера, что он отвечает ей односложно «да» и «нет». «Почему же вы не хотите со мной говорить?» – спросила она Эйлера. «Сударыня, – отвечал ученый, – я приехал из страны, где тех, кто говорит, вешают». Ответ Эйлера показывает, в каких трудных условиях ему приходилось работать в Петербургской академии того времени [111, с. 152].

«Ну, честное слово, сударь, эта теорема верна!»

С именем Д'Аламбера связан забавный случай. Рассказывают, что, обучая математике очень тупого и очень знатного ученика и не добившись понимания доказательства, Д'Аламбер в отчаянии воскликнул: «Ну, честное слово, сударь, эта теорема верна!» На что ученик отвечал: «Сударь, почему Вы мне сразу так не сказали? Вы – дворянин и я – дворянин; Вашего слова для меня вполне достаточно».

Визит к Д'Аламберу

Учась в провинции в Бомон-ан-Ож во французском департаменте Кальвадос, молодой еще тогда Пьер Симон де Лаплас имел феноменальную память. Благодаря этому Пьер Симон имел возможность привезти с собой в Париж в возрасте 18 лет искренние рекомендации влиятельных людей. Однако эти рекомендации не помогли Лапласу во время визита к Д'Аламберу, так как последнего мало интересовали юноши с рекомендациями от видных людей. Лаплас не был даже принят Д'Аламбером. И тут Лаплас понял в чем беда. Тогда Лаплас написал Д'Аламберу письмо об общих принципах механики. Ответ не заставил себя ждать. Д'Аламбер, приглашая юношу прийти, писал: «Сударь, Вы заметили, что я не обратил внимания на Ваши рекомендации; Вы в них не нуждаетесь. Вы сами лучше представили себя. Этого для меня достаточно». А уже несколько дней спустя при содействии Д'Аламбера Лаплас становится преподавателем математики Военной школы в Париже [6, с. 143].

Лучший образец

Немецкий математик и физик Абрахам Готхельф Кестнер (1719–1800) в студенческие годы учился необычайно легко, как бы играючи. Он мог себе позволить большую вольность, приглашая на прогулку даже накануне выпускных экзаменов дочку строгого экзаменатора. На упрек профессора в легкомыслии студент Кестнер без всякого смущения тут же возразил: «Господин профессор, вы же сами рекомендовали своим студентам неукоснительно следовать лучшим образцам. Вашу дочь я считаю совершенством».

Лопиталь – герой водевиля

Французский историк математики Жан Этьен Монтюкла (1725–1799) рассказывал в своей четырехтомной «Истории математики», что в первой половине XVIII в. в Париже давался водевиль «Бесконечно малые», где в качестве одного из героев фигурировал французский математик маркиз Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь.

«Да, Ваше Величество»

Когда прусский король Фридрих II назначил однажды аудиенцию немецкому математику, астроному, физику и философу Иоганну Генриху Ламберту (1728–1777), между ними состоялся следующий любопытный диалог.

К о р о л ь. Добрый вечер, сударь. Будьте любезны сказать, какие науки Вы изучили более всего.

Л а м б е р т. Все.

К о р о л ь. Таким образом, Вы и искусный математик?

Л а м б е р т. Да.

К о р о л ь. А какой профессор обучал Вас математике?

Л а м б е р т. Я сам.

К о р о л ь. Так выходит, что Вы — второй Паскаль.

Л а м б е р т. Да, Ваше Величество.

Не слишком скромные самооценки Ламберта изумили Фридриха II и он несколько месяцев не желал и слышать об избрании ученого в Берлинскую академию. Однако впоследствии король не пожалел об избрании Ламберта в академию [71, с. 69].

Любовь к музыке

Однажды французского математика и механика Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813) кто-то спросил на музыкальном вечере, почему он любит музыку, и получил неожиданный ответ: «Я люблю ее потому, что она изолирует меня. Я слышу первые три такта; на четвертом я ничего не различаю; я предаюсь своим мыслям, и ничто не отвлекает меня, именно таким образом я решил не одну трудную задачу» [6, с. 141].

«...дух бесконечно малых...»

Наполеон, сам бывший действительным членом Академии наук по секции механики, проявлял интерес к математике и симпатизировал математикам. В ноябре 1799 г. он назначил своего любимца Пьера Симона Лапласа министром внутренних дел. На этой должности Лаплас удержался недолго — всего полтора месяца. Оценку деятельности Лапласа-министра Наполеон дал в своих воспоминаниях на острове св. Елены: «Первоклассный геометр вскоре заявил себя администратором более чем посредственным; первые его шаги на этом поприще убедили нас в том, что мы в нем обманулись. Замечательно, что ни один из вопросов практической жизни не представлялся Лапласу в его истинном свете. Он везде искал какие-то субтильности, мелочи, идеи его отличались загадочностью, наконец, он весь был проникнут духом «бесконечно малых» (т. е. идеями дифференциального и интегрального исчислений), который он вносил и в администрацию» [25, с. 175]. В другом месте Наполеон отозвался о Лапласе словами: «Это большой человек, но только для бесконечно малых».

Случай на лекции

Как известно, Лаплас много лет читал лекции по математике в Нормальной школе, а затем и в Политехнической школе. Он читал свои лекции с большим мастерством и вдохновением, любил импровизировать, следил за восприятием слушателей, тоном и жестом подчеркивал важные места, словом, увлекал аудиторию открытием великих законов математики. Поэтому среди учеников Лапласа мы находим много талантливых ученых и в том числе математиков: Фурье, Коши, Пуансо, Пуассон и др.

Но однажды на лекции Лапласа случилось невероятное. Когда лекция профессора закончилась, то он к неописуемому удивлению обнаружил, что единственным слушателем был не кто иной, как его собственный кучер, который грелся около печи.

Голосование в Академии

Однажды в 1822 г. на должность непременного секретаря Академии наук баллотировались математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830) и физик, геодезист и астроном Жан Батист Био (1774—1862). Лаплас вместо одного бюллетеня взял два и на каждом из них написал имя Фурье, но это заметил сосед. Тогда Лаплас быстро положил оба бюллетеня в шляпу и попросил любопытствующего соседа выбрать один из них, а другой тут же разорвал. После этого он громко заявил, что мол не знает, кому из достойных кандидатов отдал свой голос [29, с. 16].

Вега и музыка

Великий композитор Людвиг ван Бетховен (1770—1827) никак не мог освоить четырех арифметических действий. Например, чтобы умножить 12 на 60, он вынужден был писать число 12 шестьдесят раз и лишь затем сложением находил результат искомого произведения.

Примерно такие же способности в музыке проявил австрийский математик Георг Вега (1756—1802). Он настолько «любил музыку», что не раз говаривал: «Нет ни хорошей, ни плохой музыки. Есть только большой шум и маленький шум».

Стенка кареты вместо доски

Французский физик и математик Андре Мари Ампер (1775—1836) постоянно был погружен в свои мысли, а поэтому отличался удивительной рассеянностью. Однажды вечером он прогуливался по парку, обдумывая какой-то сложный вопрос, и неожиданно наткнулся на черную стенку. Ампер по привычке мелком начал писать формулы. Через некоторое время стенка стала медленно удаляться. Ученый, поспешая за ней, продолжал свои расчеты. Когда стенка стала удаляться все быстрее и быстрее и почтенному ученому приходилось чуть ли не бежать за ней, тогда

только Ампер наконец-то очнулся, близоруко прищурился и ужаснулся, так как стенка, которую он изрядно исписал, была не чем иным, как задней стороной большой черной кареты [9].

Записка Ампера

Однажды, уходя из дома Ампер написал на двери: «Господа! Ампера нет дома, приходите сегодня вечером». Придя через некоторое время и увидев эту надпись на двери, Ампер ушел. Домой ученый появился только вечером.

Страсть к шахматам

В кругу друзей Ампер славился своим неизменным гостеприимством. Некоторое смущение вызывала лишь его необыкновенная страсть к шахматам.

Обычно любого посетителя Ампер усаживал за шахматы и часами играл с ним. Когда гостю надоедало играть или если его партия была близка к проигрышу, он мог легко прекратить игру. Достаточно было гостю заявить что-нибудь в духе: природа магнита не зависит от электричества, хлор есть окисленная соляная кислота и т. п. Огорчение от таких заявлений Ампер выдержать не мог и, как правило, выигрышную для него партию проигрывал...

«Я научился считать раньше, чем говорить»

Карл Фридрих Гаусс с семилетнего возраста учился в народной школе в Брауншвейге. Однажды на уроке арифметики учитель Бюттнер дал задачу: найти сумму всех натуральных чисел от единицы до 100. Эту задачу семилетний Карл решил мгновенно устно и вскоре положил, по заведенному порядку, на стол учителя свою доску с решением. Когда на столе образовалась горка досок с решениями задачи и учитель стал их проверять, то самым коротким и безупречным было решение Карла:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = \frac{100(100 + 1)}{2} = 5050.$$

Видимо, он интуитивно воспользовался формулой суммы членов арифметической прогрессии.

О своем искусстве считать в уме сам Гаусс впоследствии в шутку говорил: «Я научился считать раньше, чем говорить». Из биографии Гаусса известен случай, когда он, будучи еще трехлетним ребенком, из колыбели указал отцу на ошибку в денежных расчетах с наемными рабочими. Убедившись в правоте сына, потрясенный отец подарил ему мелкую монету, которую ученый хранил как дорогую реликвию. Любимейшей игрой Карла было решение задач, причем подсчеты он часто записывал углем или мелом на заборе. Впоследствии большая вычислительная работа доставляла Гауссу истинное удовлетворение и благодаря высокому искусству счета он мог буквально «на кончике пера» открывать новую планету [16]; [47].

Остроумный ответ

Из биографии Гаусса известно, что еще в народной школе он поражал учителя Бюттнера своим умом и остроумием. Однажды учитель спросил ученика: «Карл, я сейчас задам тебе два

вопроса. Если на первый ты ответишь правильно, то на второй можешь не отвечать. Итак, скажи мне, сколько иголок на рождественской елке?» Карл без промедления ответил: «67 534». «Как ты так быстро сосчитал иголки?» — изумился учитель. «А это уже второй вопрос, господин учитель», — улыбнулся ученик.

Не оправдавшееся пророчество

Гениальный русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) за годы учения в гимназии был аттестован «весьма прилежным и благонравным», а в конце курса занимался «с особенным прилежанием математикой и латинским языком». Однако сам Николай Иванович впоследствии иначе характеризовал свое учение в гимназии. Однажды он прибил гвоздем к учительскому столу кондуитный журнал перед задремавшим латинистом. Разгневанный учитель латинского языка Гилярий Яковлевич в позе римского патриция изрек: «Ты, Лобачевский, будешь разбойником!» Много лет спустя, когда тот же учитель обратился к Лобачевскому как к помощнику попечителя учебного округа с просьбой о пенсии, ученый добродушно с улыбкой напомнил ему: «А помните, вы пророчили мне совсем другое, когда я был учеником. К счастью, пророчество ваше не оправдалось». Великий геометр выхлопотал заслуженную пенсию своему бывшему учителю [95, с. 220—221].

Студенческие шалости

В студенческие годы Лобачевский отличался неистощимой изобретательностью на шалости. Однажды на спор на виду у всей публики он прокатился верхом на корове! Перепуганная корова неслась во всю прыть по университетскому двору, Лобачевский, сидя верхом, держался за рога. А веселая ватага студентов с улюлюканьем бежала за коро-

вой и подгоняла ее хворостиной. В другой раз Лобачевский как-то ночью запустил в небо ракету собственного изготовления. Дежурный на пожарной каланче, не разобравшись в чем дело, забил тревогу и поднял на ноги жителей Казани [62]; [113, с. 225].

Вместо «что и требовалось доказать»

Во времена Лобачевского профессор математики Казанского университета Г. Б. Никольский (1785—1844), доказав на лекции соответствующую теорему, неизменно добавлял: «Итак, с божьей помощью треугольники равны...»

Принцип преподавания Штейнера

По мнению швейцарского математика Якоба Штейнера, каждое новое знание должно быть самим учащимся проработано, открыто, создано. Учитель же должен лишь давать самостоятельно думающему ученику только наставление в желательном направлении. Руководствуясь этим принципом... Штейнер на своих лекциях на доске не строил никаких чертежей. Отчетливая картина должна была возникать в сознании учащихся при их живом соучастии в процессе познания без всякого чувственного восприятия. Впоследствии еще дальше пошел немецкий педагог Адольф Дистервег (1790—1866), который проводил занятия в учительской семинарии в Мерсе по геометрии в специально затемненном помещении. Дистервег был также автором книги «Шесть правил, как не надо преподавать арифметику» [58, с. 146].

Результат получен лакеем

Когда на пути в Париж Михаил Васильевич Остроградский был обобран своим попутчиком, то не стал возвращаться домой, а продолжил свой путь «по способу пешего хождения». Прибыв в Париж без гроша в кармане, Остроградский нанялся лакеем к Лапласу. Лакей видел, как ученый несколько дней безуспешно бился над решением одного весьма трудного вопроса из небесной механики, исписывая мелком большую доску. Однажды, придя домой, Лаплас увидел на доске доведенные до конца преобразования его формул с давно уже предвиденным им результатом.

Еще больше было удивление ученого, когда он узнал, что результат был получен его новым лакеем. После этого случая они стали большими друзьями [35, с. 388].

Любопытная легенда

С парижским периодом (1822–1828) жизни Остроградского связана любопытная легенда о его необыкновенной способности быстро соображать. Лаплас традиционно задавал своим слушателям задачи для решения в аудитории. С некоторого времени он стал замечать, что едва продиктует задачу, как поднимается большая фигура «с целой копной на голове» и говорит ответ на поставленную задачу. Однажды Лаплас заинтересовался «большой фигурой» и пригласил ее к себе домой. Гостем оказался не кто иной, как Остроградский, с которым Лаплас подружился [1].

Помогла долговая тюрьма

Случилось так, что на конкурс Парижской академии наук на тему «О распространении волн в технических бассейнах» за целых 10 лет не было подано ни одной работы. Проживавший в это время в Париже молодой русский математик Остроградский, не получил своевременно от отца денег, задолжал в гостинице и по заявлению ее хозяина был посажен в долговую тюрьму «Клиши». Молодой ученый в тюрьме усиленно занялся математикой и написал свою знаменитую работу «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне», в которой успешно решил вопрос, поставленный Парижской академией. В ноябре

1826 г. французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857) с самым лестным отзывом представил эту работу Парижской академии. «Мемуар» Остроградского был удостоен высшего отличия в виде публикации в «Записках ученых посторонних академий» (1832). Из долговой тюрьмы Остроградского выкупил также Коши, хотя он и не был богатым человеком. Когда, спустя многие годы, академика Остроградского спросили, чему он обязан в решении столь трудной проблемы, он кратко ответил: «Тюрьме!» [35, с. 388–389].

Высший балл

Из биографии Остроградского известно, что он являлся одно время главным наставником – наблюдателем по математическим наукам в военно-учебных заведениях России. Однажды на экзамене по интегральному исчислению в кадетском корпусе присутствовали: царь Николай I, военный министр, министр народного просвещения и другие официальные лица. Остроградский в мундире и ленте сидел неподалеку от царя. Экзаменовавшийся кадет дворянского полка отвечал бойко и громко, даже с некоторым апломбом, оперировал научными терминами, писал сложные формулы, но не сказал ни слова по билету. Царь был занят разговором с генерал-адъютантом и, хотя и не смотрел на доску, бойким ответом кадета остался доволен и порекомендовал почтенной комиссии поставить ему 12 баллов. Когда же Остроградский вновь случайно встретился с этим кадетом, сказал: «Ну, душенька, вы будете, может быть, хорошим офицером, а на войне у вас будет особенность, вас нельзя будет ранить в лоб, потому что он у вас медный».

Модные брюки

Остроградский не любил модной одежды. Один из его учеников по артиллерийской академии Н. Н. Фирсов так описывал ученого: «... Вся внешность его была массивна, крупна и нескладна. Платье на нем сидело мешком, и ноги напоминали слона...» [95, с. 289].

Однажды портной все же уговорил ученого сшить костюм по последней моде. Остроградскому на примерке брюки показались излишне узкими и он отказался взять костюм. «Но я сделал все как нужно, — уверял портной ученого. — Вы не должны отставать от века». «Помилуйте, — возразил академик, — где же мне угнаться за веком в таких узких штанах!» [95, с. 289].

«Математики – самоистязатели»

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815—1897), будучи восемь лет преподавателем католической гимназии в городе Браунсберге, усиленно занимался математикой. Директор гимназии с уважением относился к его занятиям математикой. Однажды Вейерштрасс утром не явился на урок, дав ученикам повод пошуметь в классе. Директор гимназии, придя на квартиру к Вейерштрассу, к своему удивлению обнаружил, что он всю ночь занимался математикой и, не заметив наступившего уже утра, продолжал свои размышления перед горящей лампой. Вскоре в знаменитом «Журнале чистой и прикладной математики», издаваемом А. Л. Крелле (1780—1855), появилась статья Вейерштрасса по теории функций Абеля с датой 11 сентября 1853 г.

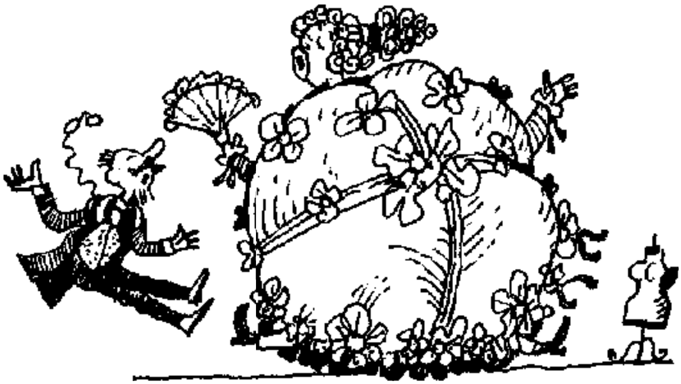
Много позднее сестра Вейерштрасса Клара в одном из писем Софье Васильевне Ковалевской (1850—1891) от 22 марта 1882 г. писала: «Математики — самоистязатели». Когда Карл одержим математикой, то даже «за едой он указательным пальцем правой руки пишет формулы на поверхности другой руки» [65].

Верность Вейерштрасса

Любопытно, что С. В. Ковалевская, очень ревнивая по своей натуре, взяла однажды с Вейерштрасса обещание, что он никогда не будет заниматься математикой ни с какой другой женщиной. Однако уже вскоре она сама, с чисто женской непоследовательностью, собиралась послать ему какую-то симпатичную ученицу, на что учитель ответил, что он помнит свое обещание и уже отказал одной немецкой даме, которая просила его заниматься по математике, и что он хочет сдержать слово, данное им Соне [61, с. 321].

Шутка гения

Во время одной из поездок в Париж в 1878 г. на VII сессию Французской ассоциации содействия преуспеванию наук академик Пафнутий Львович Чебышёв выступил 28 августа с докла-



дом на тему: «О кройке платьев». Парижская публика была широко об этом оповещена. Зал был полон разнообразной публикой. Маститого академика пришли послушать не только ученые, но модельеры и модницы. Обращаясь к собравшимся дамам и господам, Пафнутий Львович начал свой доклад на чистейшем французском языке шокирующими словами: «Предположим для простоты, что тело человека имеет форму шара...» Остроумная шутка гения была не всеми понята, так как некоторые модницы после этих слов демонстративно покинули зал [43, с. 125–126].

Периодизация Чебышёва

Однажды в разговоре П. Л. Чебышёв шутливо заметил: «В старину математические задачи задавали боги, например удвоение куба, по поводу изменения Делосского жертвенника. Далее наступил второй период, когда задачи задавали полубоги: Ньютон, Эйлер, Лагранж. Теперь третий период, когда задачи задает практика».

«...обратная теорема не всегда верна...»

Немецкий математик Фердинанд Готхольд Макс Эйзенштейн (1823–1852) в письме к математику В. Штерну однажды писал: «Мой дядя, видя какими вопросами теории чисел я занимаюсь, заметил, что стоит открыть двери дома умалишенных, чтобы иметь достаточное число гениальных математиков. Я на это ответил, а Дирихле (1805—1859) одобрил мой ответ, что, конечно, математика является некоторым родом сумасшествия, но что обратная теорема не всегда верна...»

«...а все прочее – дело рук человеческих»

Профессор математики Берлинского университета Леопольд Кронекер (1823—1891) полагал, что основой математики должно быть число, а основой всех чисел — натуральное число. Стремясь вложить все математическое в рамки теории чисел, Кронекер на съезде в Берлине в 1886 г. заявил: «Целые числа сотворил Господь Бог, а все прочее — дело рук человеческих». Защищая свои взгляды, Кронекер не признавал теорию множеств Георга Кантора (1845—1918) и вел упорную борьбу с принципами теоретико-функциональной школы Вейерштрасса. В этой связи Вейерштрасс в одном из своих писем рассказывал С. В. Ковалевской: «Нередко бывает так, что я на лекции доказываю какое-нибудь положение, которое на другой лекции признается неправильным и не выдерживающим критики. В то время как я утверждаю, что так называемое иррациональное число имеет такое же реальное существование, как и что-либо иное в области мышления, Кронекер принимает теперь за аксиому, что только целые числа между собой связаны уравнениями» [18, с. 255].

Опровержение Дедекинда

Автор наиболее широко распространенной теории иррациональных чисел немецкий математик Юлиус Вильгельм Рихард Дедекинд, как известно, прожил 84 года и умер в Брауншвейге 12 февраля 1916 г. Однако накануне третьего Международного математического конгресса в Гейдельберге в 1904 г. в «Книжке памятных дат для математиков», опубликованной в приложении к каталогу знаменитого издательства Teubner, день смерти Дедекинда был отмечен датой... 4 сентября 1899 г. Ученый немедленно отправил составителю упомянутой книжки письмо примерно следующего содержания: «Глубокоуважаемый коллега! В Вашей содержательной «Книжке памятных дат» Вы любезно вспомнили и обо мне. Я очень благодарен Вам за это. Разрешаю себе, однако, обратить Ваше внимание на то, что в указании даты моей смерти, по крайней мере, год, должно быть, указан неверно» [102].

Восторг королевы

Профессор математики Оксфордского университета Чарльз Лютвидж Доджсон (1832–1898) издал в 1865 г. под псевдонимом Льюиса Кэррола сказку «Приключение Алисы в Стране чудес». Королева Англии пришла в восторг от сказки и приказала срочно приобрести остальные сочинения Кэррола. Каково же было ее удивление и разочарование, когда выяснилось, что все остальные произведения Кэррола – сочинения по высшей математике, сравнительной анатомии, палеонтологии и систематике животных.

В дальнейшем Кэррол написал продолжение своей сказки «Сквозь зеркало, и что нашла Алиса там», очерки и сборники стихов.

Чудесное письмо

Лев Николаевич Толстой глубоко уважал Рачинского и относился к его деятельности народного учителя с большой симпатией. Так, 5 апреля 1877 г. он писал ему: «...истинную и редкую радость мне доставило чудесное письмо Ваше, дорогой Сергей

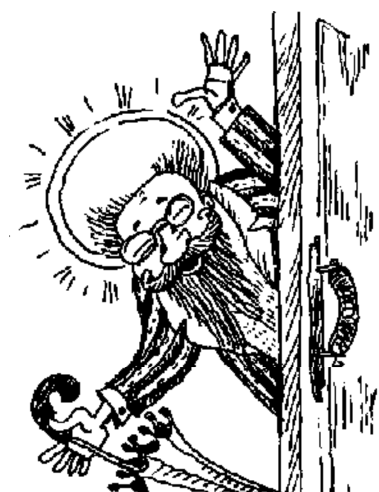
Александрович. Читая его, я переживал свои старые школьные времена, которые всегда останутся одним из самых дорогих, в особенности, частых воспоминаний. Воображаю, каких Вы наделали и наделаете чудес» [3].

Случай на конгрессе

На втором Международном математическом конгрессе в Париже в 1900 г. во время торжественного заседания были упомянуты все выдающиеся математики, скончавшиеся за прошедшее десятилетие. Среди прочих председательствующий назвал и специалиста по теории групп профессора Политехнической школы Камилла Жордано, сообщив, что он родился в 1838 г. и умер 7 ноября 1898 г. И тут неожиданно в задних рядах поднялась во весь рост высокая фигура и сообщила почтенным участникам конгресса, что, по крайней мере, дата смерти ученого названа явно неверно, так как Жордано (а это как раз он и был) еще жив и находится перед вами. На самом деле Камилл Жордано умер лишь 21 января 1922 г. [72, с. 144].

«...нуль равен нулю...»

Старейший профессор физико-математического факультета Петербургского университета Александр Николаевич Коркин (1837–1908), читая в 1908 г. чуть ли не в 50-й раз курс интегрирования дифференциальных уравнений, оказался в ситуации, в которую попадают зачастую новички. При интегрировании по частям неудачным разбиением подынтегральной функции он умудрился получить первоначальную функцию. Не показав своего смущения, Коркин, по-вологодски «окая», заявил слушателям: «Итак, получилось нуль равен нулю. Что не ново, господа!»



И тут же зазвенел звонок. Коркин как ни в чем не бывало поклонился и вышел из аудитории и тем самым из пикантного положения [54].

«Математика – это язык!»

Американский физик, механик и математик Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) был очень замкнутый человек и обычно молчал на заседаниях Ученого совета Иельского университета. Но на одном из заседаний, когда решался вопрос о том, чему уделять в новых учебных программах больше места – математике или иностранным языкам, он не выдержал и произнес речь: «Математика – это язык!» – сказал он.

«С тех пор все скоты боятся нового...»

Рассказывают, что во время своих скитаний по бюрократическим учреждениям Петербурга С. В. Ковалевская как-то попала в кабинет одного чиновника, который в ответ на ее просьбу разрешить преподавать в университете ответил отказом, грубо прибавив: «У нас всегда этим занимались мужчины. Справляются они со своими обязанностями, слава богу, хорошо, и поэтому не надо нам никаких нововведений!» На это возмущенная С. В. Ковалевская сказала: «Когда Пифагор открыл свою знаменитую теорему, он принес в жертву богам 100 быков. С тех пор все скоты боятся нового...»

«О ты, чья звезда ярко сияет над озером Мелар...»

Мелар – это озеро, на берегу которого стоит Стокгольм...

В одном из шутливых писем к своей приятельнице, польской революционерке М. В. Мендельсон-Залесской (1850–1909) С. В. Ковалевская говорит о трех своих «молодых» поклонниках, которым в сумме больше 200 лет.

Одним из хранителей теплой дружбы в Берлине был «молодой математик X», немецкий физик Густав Ханземан (1829–1902). Когда Соня Ковалевская познакомилась с Ханземаном, он был уже пожилым человеком. Именно по его инициативе бывали их совместные выезды с Вейерштрассом и Ковалевской в

театр. Однажды, когда Ханземан пригласил в очередной раз в театр и Вейерштрасса, последний сказал, что не успел еще проверить выкладки к предстоящей лекции. Тогда необходимые преобразования быстро проделала Ковалевская и дружная компания отправилась в театр. Около своего дома Ханземан обучал Ковалевскую катанию на коньках. Когда Ковалевской в Стокгольме предложили читать лекции не только по математике, но и по механике, она написала 9 ноября 1885 г. своему берлинскому другу Ханземану в шутливой форме: «...Моя формула теперь гласит: фрау Соня = $(\text{профессору})^2$» [60, с. 292]. В ответном письме от 15 декабря 1885 г. Ханземан откликается на шутку Ковалевской словами: «Мой дорогой друг и $(\text{профессор})^2$! Ваше последнее письмо доставило мне двойную радость, потому что оно было вдвое длиннее, чем обычно... То, что Вы теперь читаете и аналитическую механику и что ввиду этого возникло равенство: фрау Соня равна профессору в квадрате, при Вашем рвении к святому делу математики, меня крайне поразило» [89, с. 38].

Вторым поклонником Ковалевской был талантливый изобретатель в области телефонии Павел Михайлович Голубицкий (1845–1911). Когда Ковалевскую утвердили профессором Стокгольмского университета, Голубицкий прислал ей вексель на оплату в сумме 4000 рублей. За это в своем письме к биологу Александру Онуфриевичу Ковалевскому (1840–1901) она шутя назвала его «разбойником». Летом 1885 г., возвращаясь из Одессы в Москву, Ковалевская посетила Голубицкого в деревне Пачево близ города Тарусы и подружилась с ним.

Описав первых двух «молодых» поклонников, С. В. Ковалевская добавляет: «...третий же – молодой 72-летний английский ученый, пишет сонеты в мою честь». Этим математиком и поэтом был Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897). Вот один из его сонетов.

Сонет молодой даме, собиравшейся петь на еженедельном концерте в Бэллиоль-колледже

Прекрасная дева, чей голос низводит музыку с небес,
(Для труженика – их лучший и ценнейший дар),
Чье пенье так же разнообразно, как вечно меняющаяся луна,
И нежно, как слеза, которую роняют чистые очи, –
Пусть ложные страхи, злейшие враги истинного достоинства,
Не мешают твоему порыву – не рассеивают слишком скоро нашу радость.
Надоест ли аромат розы в июньский знойный день,
Иль ласковый ветерок, замирающий в прохладной ложбине?

О ты, чья звезда ярко сияет над озером Мелар,
И ты, украшение веселых берегов Изиды,
Позвольте, я сплету вам единый гармонический венок.
Ты можешь звуками пленить наши чувства,
А она – средь немых чисел ударить с силой Прометея
По всем струнам всепобеждающего разума Человека»
[93, с. 706].

В этом сонете фраза «...веселых берегов Изиды...» на студенческом жаргоне означает название берегов Темзы в Оксфорде.

Что такое математика?

Известный русский математик академик Андрей Андреевич Марков (1856–1922) на вопрос, что такое математика, ответил: «Математика – это то, чем занимаются Гаусс, Чебышёв, Ляпунов, Стеклов и я» [40, с. 35].

Ночная эвристика

Русский математик и механик Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) начал писать свой труд «О формах равновесия вращающихся жидкостей» еще совсем молодым человеком. Однажды он долго и безуспешно бился над решением системы дифференциальных уравнений, ученому явно мешал шум проезжавших по улице экипажей. Отложив задачу на ночь, Ляпунов довольно быстро ее решил, так как его никто не отвлекал. Эта удачная ночная эвристика побудила ученого резко изменить свой уклад жизни. Математик 40 лет работал по ночам, а днем отсыпался, и лишь незадолго до кончины закончил, наконец, третий том своего капитального труда.

Однажды на лекции

Замечательный русский педагог-математик Алексей Константинович Власов (1868–1922), изложив однажды на очередной лекции по аналитической геометрии задачу о пересечении двух прямых, заданных своими уравнениями, добавил:

«Два студента, впервые ознакомившиеся с этим вопросом, беседовали между собою.

Один сказал: «Теперь я понял, почему система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет в общем случае одно решение. Это потому, что две прямые пересекаются в одной точке».

Другой ответил: «Вот когда я, наконец, понял, почему две прямые пересекаются в одной точке! Это потому, что система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет одно решение» [63].

Интересное число

Однажды Харди приехал навестить в больнице Сриниваса Рамануджана (1887–1920) и в разговоре пошутил, что хотя и запомнил номер такси — 1729, но не находит это число чем-либо примечательным. На что Рамануджан тут же возразил: «Напротив, это — очень интересное число. Оно наименьшее число, представимое в виде суммы двух кубов двумя различными способами:

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3».$$

Рассказал об этом Харди как-то на одном из заседаний английского математического общества, а кто-то из математиков возьми да и спроси его: «Может быть, это число хотя бы еще и простое?» Оплошности бывают и с математиками. Спрашивающий совершенно упустил из внимания, что сумма двух кубов всегда разложима и, в частности, для этого числа немедленно следует разложение:

$$1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19.$$

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

...И опыт, сын ошибок трудных...

А. С. Пушкин

К главе I

Число есть сущность всех вещей.

Пифагор

1. 1280 лотов; 3840 золотников.
2. 25 фунтов.
3. 6000 вершков.
4. 1 р. 25 коп.
5. 146 р.
6. 13 к.
7. 43 к.
8. 1440 мин; 10 080 мин.
9. 8760 ч.
10. 40 листов.
11. 60 к.; 1 р. 80 к.
12. За 7 ч.
13. 25 пудов.
14. 1 р.
15. 100 р.
16. 8 мальчиков.
17. 12 р.
18. 16 верст; 24 версты.
19. 17 к.; 51 к.; 1 р. 53 к.
20. 6760 верст.

21. 8 детей.
22. 24 ковра.
23. За сутки.
24. 21 стопу.
25. 60 яблок.
26. 288 дней.
27. 25 ч.
28. 1 пуд 5 фунтов.
29. 9 пудов 15 фунтов.
30. 36 стаканчиков.
31. 200 рельсов.
32. 80-й пробы.
33. 1 мера 2 гарнца.
34. 2 стопы.
35. 16 кур.
36. 6 бумажек.
37. За 20 дней.
38. 20 р.
39. 4; 3; 2; 1 яблок.
40. 28; 12 аршин.
41. 4 к.; 20 к.; 1 р.
42. По 20 к.
43. По 4 р.
44. 180 ударов.
45. В 7 ч утра.
46. 1 фунт.
47. 3 пуда.
48. 11 простых писем; 7 заказных.
49. 11 четвертей 2 меры.
50. 4 рабочих.
51. 100 человек.
52. 24 фунта; 24 лота; 8 лотов.
53. 105 р.; 135 р.
54. 312 орехов.
55. 1 пуд.
56. 192 яблока.
57. 32 подводы.
58. 6552 версты.
59. 48 саженей.
60. 3 стопы.

61. 5, 40, 320 дней.
62. 7200 листов.
63. 24; 18 лет.
64. 24 караульных.
65. 240 верст.
66. 8 р. 40 к.
67. 8 р.; 4 р.
68. 72-й пробы.
69. 2000 задач.
70. 800 раз.
71. 420 раз.
72. 28 рядов.
73. 60 аршин.
74. 1 пуд.
75. В понедельник в 5 ч утра.
76. 100 000 солдат.
77. 15; 15; 30; 60 мух.
78. 10 мин.
79. 5 пудов.
80. 2100; 700; 300 верст.
81. 576; 192; 2 пуда.
82. 13; 17 р.
83. 18; 26 коров.
84. 25 р.
85. Галок 20; берез 15.
86. 56; 40 орехов.
87. 156 верст.
88. По 16 орехов.
89. 75 пряников.
90. На 3 р.
91. 912 оборотов.
92. 12 саженей.
93. У меня, на девять.
94. 9; 7 шашек.
95. 3 р.
96. 6 дней.
97. 300 комаров.
98. В один день.
99. 5220 ударов.
100. На 5 линий.

К главе II

Конечно, будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться.

Д. Пойа

101. Числа ряда 7; 49; 343; 2401; 16 807. Их сумма 19 607. Эта задача-путешественница из древнего египетского папируса трансформировалась на Руси в старинную народную задачу и встречалась в различных формулировках (см. задачу 224).

102. 10 мер хлеба автор разлагает на 10 членов арифметической прогрессии с разностью $\frac{1}{8}$ и получает, что 10-й член прогрессии равен

$$1 + 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{9}{16}.$$

103. По условию задачи $\left(\frac{8}{9}d\right)^2 \approx \frac{\pi d^2}{4}$. Тогда

$$\pi = \frac{8^2 \cdot d^2 \cdot 4}{9^2 \cdot d^2} = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605,$$

что дает довольно точное приближение с ошибкой 0,6%.

104. 30 и 10.

105. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу, следовательно, $2\pi R = 6R$, откуда $\pi = 3$.

106. 15.

107. Пусть требуется разделить прямой угол *ABC* (рис. 18) на три равные части. Для этого древние вавилоняне на отрезке *BD* стороны *BA* строили равносторонний треугольник *BED*. Тогда угол *CBE* будет составлять одну треть данного прямого угла. Остается только разделить пополам угол *DBE*, и задача будет решена.

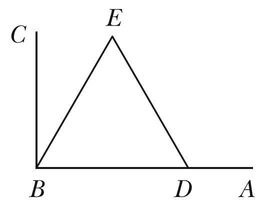


Рис. 18

108. Пусть Парис предположил, что Афина изрекла истину. Тогда она прекраснейшая из богинь, и по предположению утверждение (4) ложно. Мы приходим к противоречию, так как Гера не может быть прекраснейшей из богинь, коль скоро прекраснейшая из богинь Афина. Таким образом, исходное предположение ложно.

Если Парис предположит, что истину изрекла Гера, то она прекраснейшая из богинь, и по предположению утверждение (2) ложно. Мы снова приходим к противоречию, так как Афродита не может быть прекраснейшей из богинь, коль скоро прекраснейшая из богинь Гера. И это исходное предположение ложно.

Если Парис, наконец, предположит, что Афродита изрекла истину, то Афродита – прекраснейшая из богинь. Отрицания утверждений (2), (3) и (5) истинны и показывают, что Афродита – прекраснейшая из богинь.

Итак, по «суду Париса» прекраснейшей из богинь является Афродита.

109. Решение задачи Дидоны легко и красиво следует из изопериметрического свойства круга: среди всех плоских фигур данного периметра максимальную площадь имеет круг. Это замечательное свойство круга было известно в Древней Греции. Поэтому Дидона окружила имевшейся веревкой участок земли в форме полукруга с центром на берегу моря.

110. Для определения расстояния от точки A на берегу (рис. 19) до недоступной точки B (местонахождение корабля на море) строился треугольник ABC с доступной точкой C на берегу, после чего отрезки AC и BC продолжались по другую сторону точки C и строился треугольник CDE такой, что $CD = AC$, $\angle ACB = \angle DCE$ и $\angle CDE = \angle CAB$. Тогда по теореме о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла, получаем $AB = DE$.

111. В школе Пифагора было 28 учеников.

112. В школе Пифагора эта задача решалась геометрически. Действительно, если от квадрата отнять гномон, т. е. фигуру Г-образной формы (рис. 20), представляющий нечетное число, то в остатке получится квадрат, т. е. тогда

$2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$.

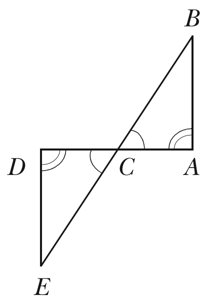


Рис. 19

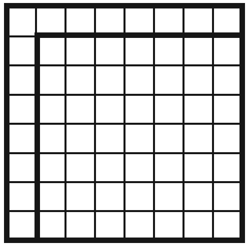


Рис. 20

113. В тождестве $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ (задача 112) подставить значения $k = 1, 2, 3, ..., n$ и просуммировать почленно n полученных равенств. В итоге найдем:

$1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$.

Вычисление сумм — один из интереснейших и важнейших вопросов математики. С различными специальными методами суммирования можно познакомиться по статьям [69].

114. $x = (n^2 - m^2)k$, $y = 2nmk$, $z = (n^2 + m^2)k$, где $n > m$, k — натуральные числа, m и n — взаимно простые числа разной четности. Подробнее см. [24].

115. См. рис. 21.

116. 40.

117. 3360.

118. Пусть у каждой из граций было по x плодов и они отдали каждой из муз по y плодов. Тогда по условию задачи должно быть

$x - 9y = 3y$ или $x = 12y$,

т. е. у каждой из граций до встречи с музами число плодов было кратно 12.

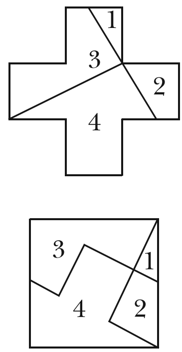


Рис. 21

119. Пусть a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$. Сумма площадей луночек равна

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 + \frac{ab}{2} - \frac{\pi}{8}c^2 =$$

$$= \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2},$$

так как $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

Следовательно, $S_1 + S_2 = \frac{ab}{2} = S_{\triangle ABC}$, что и требовалось доказать.

120. Если x — груз мула, то $(x-1)$ — груз осла, увеличенный на единицу, а следовательно, первоначальный груз осла был $(x-2)$. С другой стороны, $x + 1$ в два раза больше, чем груз осла, уменьшенный на 1, т. е. $x + 1 = 2(x - 3)$. Отсюда груз мула $x = 7$ и груз осла $x - 2 = 5$.

123. Другими словами, Евклид утверждает, что множество простых чисел бесконечно. Этот результат Евклида помещен в IX книге его «Начал» в качестве 20-й теоремы. Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что множество простых чисел конечно и состоит из чисел 2, 3, 5, ..., p, где p — самое большое простое число. Рассмотрим натуральное число $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Очевидно, при делении N на все простые числа 2, 3, 5, ..., p получается остаток, равный 1. Значит, $N > 1$ должно делиться на простое число, отличное от 2, 3, 5, ..., p. Предположение, что множество простых чисел конечно, привело нас к противоречию, т. е. нет наибольшего простого числа.

124. В справедливости равенства можно убедиться, возведя обе части в квадрат.

126. Из тождества $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ при $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ сложением находим последовательно:

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + \ldots + n) + n;$$

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = n^3 - n + \frac{3(n+1)n}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

127. Искомая площадь равна (см. рис. 5):

$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}(AC^2 - AD^2 - DC^2) =$$

$$= \frac{\pi}{8}((AD + DC)^2 - AD^2 - DC^2) = \frac{\pi}{8} \cdot 2AD \cdot DC = \frac{\pi}{4}BD^2 = \pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

129. Чтобы убедиться в справедливости неравенства Архимеда, разложим $\sqrt{3}$ в бесконечную периодическую цепную дробь [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...] (см. приложение II, пример 5) и найдем соответствующие подходящие дроби:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}.$$

Как видно, Архимед заключил число $\sqrt{3}$ между девятой и двенадцатой подходящими дробями.

130. Овладев секретом «стомахионной мозаики» (составление фигурок может быть совершенно точным или же допускается некоторое приближение), можно составить различные фигурки, например корабля, меча, шлема, кинжала, колонны, деревца, петуха, курицы, цапли и т. п. Можно показать, что площади всех 14 частей стомахиона Архимеда находятся в рациональных отношениях. Иногда вместо квадрата берут прямоугольник (например, с соотношением сторон 1 : 2), и даже произвольный параллелограмм. При составлении фигур части исходной фигуры можно переворачивать «лицевой» стороной вниз. Необходимо лишь соблюдать условие, чтобы составленная фигура содержала все его 14 частей. Потомки стомахиона — игры танграм, яйцо Колумба, сфинкс и др. [41].

131. Многоугольные или n-угольные числа связаны определенным образом с плоским многоугольником. Отсюда еще одно их название — фигурные числа.

Простейшими из многоугольных чисел являются треугольные:

$$\begin{array}{r} 1, \\ 1+2=3, \\ 1+2+3=6, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1+2+3+\dots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

которые, начиная со второго, геометрически получаются из треугольника. Аналогичным образом получаются квадратные, пятиугольные и т. д. числа (рис. 22).

Таким образом, m-е n-угольное число есть сумма m первых членов арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью $n-2$:

$$P_n^m = m + (n-2)\cdot\frac{m(m-1)}{2}.$$

Частные случаи этого общего правила для нахождения треугольных, квадратных, пятиугольных и т. д. чисел были известны пифагорейцам еще раньше:

$$P_3^m = 1+2+3+\dots+m = \frac{1+m}{2}\cdot m = m + 1\cdot\frac{m(m-1)}{2};$$

$$P_4^m = 1+3+5+\dots+(2m-1) = \frac{1+(2m-1)}{2}\cdot m = m + 2\cdot\frac{m(m-1)}{2};$$

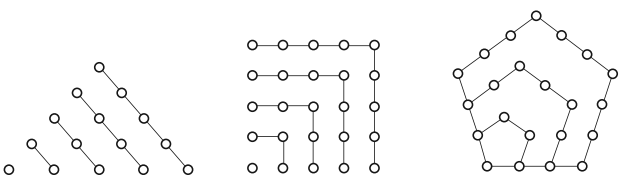


Рис. 22

$$P_5^m = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3m-2) = \frac{1+(3m-2)}{2} \cdot m = \frac{m(3m-1)}{2} =$$

$$= m + 3 \cdot \frac{m(m-1)}{2}$$

и т. д. Пространственные аналоги треугольных чисел в трехмерном пространстве называются тетраэдными (иногда просто пирамидальными) числами. Более подробно с фигурными числами можно познакомиться по статье [11].

132. $\frac{12}{25}$ дн. (см. решение аналогичной задачи № 228).

133. Пусть B' — точка, симметричная B относительно прямой l (рис. 23). Тогда точка C пересечения AB' с прямой l будет искомой, так как для любой точки C', отличной от C, будет

$AC' + C'B = AC' + C'B' > AB' = AC + CB.$

Интересные задачи на максимум и минимум можно найти в [106].

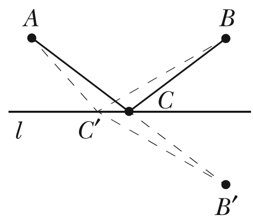


Рис. 23

134. $(n(n-1)+1) + (n(n-1)+3) + \ldots$
$\ldots + (n(n-1) + (2n-1)) = n^3.$

136. $n_n = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \ldots$

$$\ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}((1^2+1) + (2^2+2) + (3^2+3) + \ldots + (n^2+n)) = \frac{1}{2}((1+2+$$

$$+ 3 + \ldots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}\left(1 + \frac{2n+1}{3}\right) = \frac{n(n+1)}{4} \cdot \frac{2n+4}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

137. Имение следует разделить между сыном, женой и дочерью пропорционально числам 4 : 2 : 1.

138. 84 года.

139. Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} X - (X+Y+Z)^2 = \alpha^2, \\ Y - (X+Y+Z)^2 = \beta^2, \\ Z - (X+Y+Z)^2 = \gamma^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Диофант использовал подстановки:
$X + Y + Z = x,\ X = 2x^2,\ Y = 5x^2,\ Z = 10x^2.$

Система (1) преобразуется в систему

$$\begin{cases} x^2 = \alpha^2, \\ 4x^2 = \beta^2, \\ 9x^2 = \gamma^2. \end{cases}$$

Из соотношения $X + Y + Z = x$ он получил $2x^2 + 5x^2 + 10x^2 = x$, откуда $x = \frac{1}{17}$. Искомыми числами, в частности, будут $X = \frac{2}{289}$, $Y = \frac{5}{289}$, $Z = \frac{10}{289}$.

141. Искомый магический квадрат показан на рис. 24.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 24

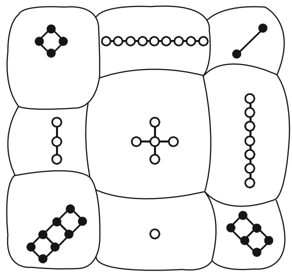


Рис. 25

В древнекитайской рукописи «Же-ким» («Книга перестановок») описывается предание, согласно которому император Июь увидел однажды на берегу реки священную черепаху с узором на панцире из белых и черных кружков (рис. 25). Этот рисунок на панцире черепахи считали магическим символом и употребляли при заклинаниях. Заменяя фигуры рисунка соответствующими числами, получим магический квадрат, изображенный на рис. 24.

142. Если через x_1, x_2, x_3 обозначить соответственно хороший, средний и плохой урожай 1 снопа, то задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 39, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 34, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 9\frac{1}{4}$ (доу), $x_2 = 4\frac{1}{4}$ (доу) и $x_3 = 2\frac{3}{4}$ (доу).

143. $23 + 105t$, где t — целое неотрицательное число.

144. Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 5x + 3y + \dfrac{z}{3} = 100, \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

Отсюда

$x_1 = 0,\ y_1 = 25,\ z_1 = 75;\ x_2 = 4,\ y_2 = 18,\ z_2 = 78;$

$x_3 = 8,\ y_3 = 11,\ z_3 = 81;\ x_4 = 12,\ y_4 = 4,\ z_4 = 84.$

145. Цзу Чун-чжи показал, что искомая дробь есть $\dfrac{355}{113}$ (ее вновь нашел голландский математик В. Отто (ок. 1550–1605)).

Эту дробь можно получить, найдя несколько первых элементов разложения числа π в цепную дробь $[3; 7, 15, 1, 292, \dots]$, а затем вычислить соответствующие подходящие дроби (о цепных и подходящих дробях см. приложение II)

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103\,993}{33\,102},\ \dots .$$

146. Рассмотрим квадратную числовую таблицу (рис. 26). С одной стороны, сумма чисел в каждом гномоне (наугольнике) дает полный куб:

1	2	...	n
2	$2 \cdot 2$	...	$2n$
...	...	...	...
n	$2n$	...	$n \cdot n$

Рис. 26

$1 = 1^3,$

$2 + 4 + 2 = 2^3,$

....

$n + 2n + \dots + n \cdot n + (n - 1)n + \dots + 2n + n =$
$= n^3.$

С другой стороны, складывая числа по строкам таблицы, получим

$(1 + 2 + \dots + n) + 2(1 + 2 + \dots + n) + \dots + n(1 + 2 + \dots + n) =$
$= (1 + 2 + \dots + n)^2.$

Следовательно,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

147. $2^n = (1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n.$

148. $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 =$
$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$

149. Решение задачи показано на рис. 27.

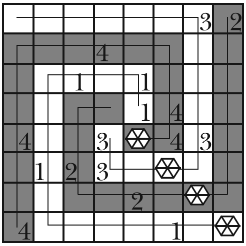


Рис. 27

150. Задача сводится к решению уравнения

$ax + b = cx + d$, откуда $x = \dfrac{d-b}{a-c}$,

где у первого лица будет a вещей и b монет, а у второго лица — c вещей и d монет.

151. Искомые числа x должны удовлетворять соотношениям $x = 60n + 1$, $x = 7a$, где n и a — некоторые натуральные числа. Из $60n + 1 = 7a$ имеем:

$$a = \frac{60n+1}{7} = 8n + \frac{4n+1}{7}.$$

Для натуральных a получаем $n_1 = 5$, $x_1 = 301$; $n_2 = 12$, $x_2 = 721$; ... .

152. Из рис. 10 имеем $\frac{1}{2}(a + b + d)x = \frac{1}{2}ah + dh + \frac{1}{2}d(x - h) + \frac{1}{2}bh$,

откуда $x = h\left(1 + \dfrac{d}{a+b}\right)$.

153. Задача сводится к решению уравнения

$$\left(\frac{1}{16^2} + \frac{15^2}{9^2 \cdot 16^2}\right)x^2 + 14 = x,$$

где x — число павлинов в стае. Отсюда $x_1 = 48$, а $x_2 = \dfrac{336}{17}$ не подходит.

154. $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (1 + 1)^5 - C_5^0 = 31$.

155. 63.

156. Применив метод инверсии (правило обращения), получим:

1) $2 \cdot 10 = 20$;

2) $20 - 8 = 12$;

3) $12^2 = 144$;

4) $144 + 52 = 196$;

5) $\sqrt{196} = 14$;

6) $14 \cdot \frac{3}{2} = 21$;

7) $21 \cdot 7 = 147$;

8) $147 \cdot \frac{4}{7} = 84$;

9) $84 : 3 = 28$ или короче $x = \sqrt{(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52} \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} : 3 = 28$.

157. Прибавив к обеим частям данного уравнения по $4x^2 + 400x + 1$, получим

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10\,000.$$

Извлекая квадратные корни из обеих частей, имеем

$$x^2 + 1 = 2x + 100.$$

Отсюда $x_1 = 11$, а $x_2 = -9$ как отрицательный не учитывался.

158. По методу «рассеивания» индийских математиков всевозможные решения в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными (a, c — натуральные, взаимно простые числа, причем $a > c$, и b — целое число)

$$ax + b = cy$$

находятся по формулам

$$x = (-1)^{n-1}bQ_{n-1} + Q_n t,\ y = (-1)^{n-1}bP_{n-1} + P_n t,$$

где t — целое число, P_{n-1}, P_n, Q_{n-1}, Q_n — числители и знаменатели предпоследней и последней подходящих дробей. Имеем $\frac{a}{c} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{100}{63} = [1; 1, 1, 2, 2, 1, 3]$, $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{27}{17}$ (см. приложение II, пример 4), $x = 90 \cdot 17 + 63t = 1530 + 63t$,
$y = 90 \cdot 27 + 100t = 2430 + 100t$.

При $t = -24$ получаем наименьшие целые положительные решения $x = 18$ и $y = 30$.

159. $10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$.

160. Если x и y — число голубей на дереве и под деревом, то по условию имеем

$$\begin{cases} y - 1 = \dfrac{x+1}{3}, \\ x - 1 = y + 1. \end{cases}$$

Отсюда $x = 5$ и $y = 3$.

161. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 =$
$= (1^2 + 2^2 + \ldots + (2n)^2) - (2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2) =$
$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.

Как видно, здесь дважды использовался результат задачи Архимеда (задача 126).

162. Обозначив $\frac{10-x}{x} = y$, получим $y^2 + 1 = \sqrt{5}y$ и $y = \frac{\sqrt{5}}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Из уравнения $\frac{10-x}{x} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$ последовательно имеем

$$10 - \frac{3}{2}x = \frac{\sqrt{5}}{2}x \text{ и } x = 5(3 - \sqrt{5}).$$

Аналогичным образом из уравнения $\frac{10-x}{x} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ получим $x = 5(\sqrt{5} - 1)$.

163. Например, $x_1 = 16$, $y_1 = 8$, $z_1 = 9$, $u_1 = 8$, $v_1 = 59$; $x_2 = 34$, $y_2 = 14$, $z_2 = 18$, $u_2 = 20$, $v_2 = 14$; ... . Абу Камил в «Книге редкостей в арифметике» нашел всего 2676 целых решений системы.

164. Сторону правильного вписанного пятиугольника ($x = a_5$) удобно вычислить через сторону правильного вписанного десятиугольника ($y = a_{10}$). Пусть окружность имеет радиус R (рис. 28), $AB = a_5$ и $AC = a_{10}$. Тогда угол AOC равен 36°. Разделив угол OAC пополам прямой AD, получим равнобедренные треугольники DAC и ADO, у которых $AC = AD = OD$. По свойству биссектрисы угла треугольника получим: $AO : AC = OD : DC$ или

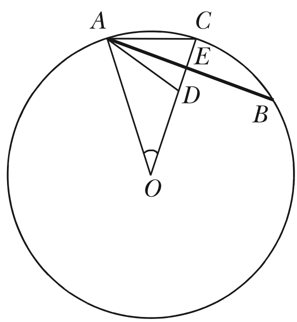


Рис. 28

$$R : y = y : (R - y). \tag{1}$$

Откуда $y^2 + Ry - R^2 = 0$ и положительное решение этого уравнения можно представить в виде

$$y = a_{10} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} - \frac{R}{2} \tag{2}$$

или

$$y = a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R = R \cdot 0{,}618...$$

Пропорция (1) выражает собой деление радиуса окружности в среднем и крайнем отношении (золотое сечение). Выражение (2) подсказывает способ геометрического построения искомого $y = a_{10}$. В самом деле, отрезок, выражаемый формулой $\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2}$, представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами, равными R и $\frac{R}{2}$. Чтобы получить отрезок $y = a_{10}$, достаточно из гипотенузы построенного треугольника вычесть $\frac{R}{2}$. Подробнее изложение золотого сечения можно найти в статье [10].

Сторона правильного вписанного пятиугольника

$$x = a_5 = AB = 2AE = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,R$$

найдется из соотношения

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = AO^2 - OE^2 = R^2 - (R - CE)^2,$$

отсюда $CE = \frac{3-\sqrt{5}}{4}R$ и, значит, $OE = \frac{\sqrt{5}+1}{4}R$.

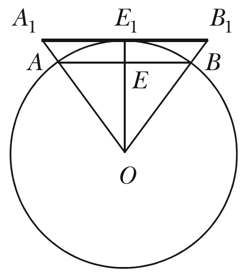


Рис. 29

И наконец, сторона описанного правильного пятиугольника A_1B_1 (рис. 29) найдется из подобия треугольников AEO и A_1E_1O.

Имеем $\frac{A_1E_1}{AE} = \frac{OE_1}{OE}$ и $A_1B_1 = 2A_1E_1 = \frac{2AE \cdot OE_1}{OE} = \frac{a_5R}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}R} =$

$$= \frac{4R}{\sqrt{5}+1}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,R.$$

165. Решение задачи можно усмотреть из рис. 30.

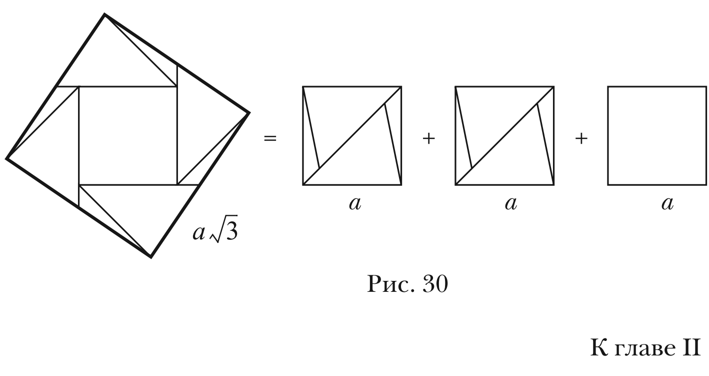


Рис. 30

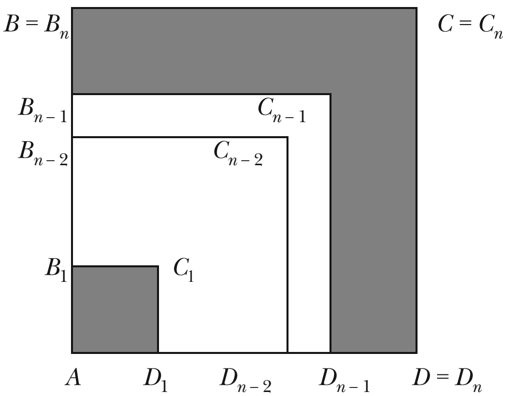


Рис. 31

166. Пусть $1 + 2 + \ldots + n$ — сторона квадрата $ABCD$ (рис. 31). Разобьем площадь квадрата $ABCD$ на площади гномонов ($BB_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}DC$, $B_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}D_{n-2}C_{n-2}$, ...) и квадрата $B_1AD_1C_1$, где $DD_{n-1} = BB_{n-1} = n$, $D_{n-2}D_{n-1} = B_{n-2}B_{n-1} = n - 1$, ..., $D_1A = B_1A = 1$. Площадь гномона $BB_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}DC$ равна

$$2n(1 + 2 + \ldots + n) - n^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

Площадь гномона

$B_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}D_{n-2}C_{n-2}$ равна $(n-1)^3$.

Таким образом,

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

167. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n) =$

$$= \left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right)n\left(n + \frac{1}{2}\right)\left((n+1)n - \frac{1}{3}\right).$$

Для решения задачи можно использовать тождество

$n^5 - (n-1)^5 = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1$

или применить метод математической индукции [104].

168. Пусть $m = 9n_1 + 1$, $m^2 = 81n_1^2 + 18n_1 + 1 = 9n + 1$.

Аналогично $m = 9k_1 + 8$, $m^2 = 81k_1^2 + 144k_1 + 64 = 9k + 1$.

169. В справедливости тождества можно убедиться, используя формулу

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

170. $1\frac{1}{9}$ динара.

171. Пусть первоначально в корзине было x слив. Первый жених получил бы $\frac{x}{2}+1$ слив, второй $\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ слив, третий $\frac{x}{8}+\frac{9}{4}$ слив. Так как $\left(\frac{x}{2}+1\right)+\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{x}{8}+\frac{9}{4}\right)=x$, то у Либуши первоначально было 30 слив.

172. За 75 прыжков.

174. Задача приводит к решению системы

$$\begin{cases} x^2+5=y^2, \\ x^2-5=z^2 \end{cases} \qquad (1)$$

в рациональных числах.

Пусть m и n — целые числа.

Имеют место тождества

$$(m^2+n^2)^2 \pm 4mn(m^2-n^2)=(m^2-n^2 \pm 2mn)^2. \qquad (2)$$

При $m=5$, $n=4$ из тождества (2) получаем

$41^2+5 \cdot 12^2=49^2$,

$41^2-5 \cdot 12^2=31^2$

или

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2,$$

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2.$$

Систему (1) можно решить и следующим способом. Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим

$y^2-z^2=10$ или $(y+z)(y-z)=\frac{80 \cdot 18}{12^2}$.

Полагая $y+z=\frac{80}{12}$, $y-z=\frac{18}{12}$, находим

$y=\frac{49}{12}$ и $z=\frac{31}{12}$, откуда $x^2=\left(\frac{41}{12}\right)^2$.

Таким образом, рациональным квадратным числом, которое, будучи увеличено или уменьшено на 5, дает рациональное квадратное число, будет $\left(\frac{41}{12}\right)^2$. Решение Леонардо опиралось на формулы суммирования последовательных четных и нечетных чисел.

175. 3 куропатки, 5 голубей, 22 воробья.

176. От одной пары кроликов в год родится

$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144 = 376.$

Эта задача приводит к ряду Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...,

каждый член которого, начиная с третьего, есть сумма двух ему предшествующих. С числами Фибоначчи связаны увлекательнейшие главы элементарной математики и довольно трудные теоретико-числовые проблемы. До сих пор, например, не решен вопрос о конечности множества простых чисел Фибоначчи. (О числах Фибоначчи см. приложение III, подробнее также [23]; [118].)

177. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x + 7 = 5(y - 7), \\ y + 5 = 7(x - 5) \end{cases}$$

получим, что первый имел $x = 7\frac{2}{17}$ динария, а второй $y = 9\frac{14}{17}$ динария.

178. Если m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 – массы гирь, то массу $m \leqslant 30$ весовых единиц любого груза необходимо представить в виде

$m = a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a_4m_4 + a_5m_5,$

где коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 равны либо 0, либо 1. Массы гирь m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 достаточно выбрать равными 1, 2, 4, 8, 16 весовым единицам, так как сумма масс равна 31, что больше 30. Любое число $m \leqslant 30$ можно представить в виде

$m = a_5 2^4 + a_4 2^3 + a_3 2^2 + a_2 2^1 + a_1 2^0,$

где коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 равны либо 0, либо 1.

179. Из условия задачи получаем систему

$$\begin{cases} x + y + z + x^2 = u^2, \\ x + y + z + x^2 + y^2 = v^2, \\ x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \end{cases} \qquad (1)$$

или ей равносильную

$$\begin{cases} x + y + z + x^2 = u^2, \\ u^2 + y^2 = v^2, \\ v^2 + z^2 = w^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Положим $x = kx_1$, $y = ky_1$, $z = kz_1$. Решениями в рациональных числах второго и третьего уравнений системы (2) будут соответственно пифагорейские тройки: $u = 3k$, $y = 4k$, $v = 5k$ и $v = 5k$, $z = 12k$, $w = 13k$. Тогда $y_1 = 4$ и $z_1 = 12$. Из первого уравнения системы (1) или (2) получим

$$kx_1 + 4k + 12k + (kx_1)^2 = 9k^2$$

или

$$x_1 + 16 = k(9 - x_1^2). \qquad (3)$$

Одним из возможных решений в рациональных числах уравнения (3) будет $x_1 = \frac{4}{3}$ и $k = \frac{12}{5}$. Теперь находим искомые числа: $x = kx_1 = \frac{12}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{5}$; $y = ky_1 = \frac{12}{5} \cdot 4 = \frac{48}{5}$; $z = kz_1 = \frac{12}{5} \cdot 12 = \frac{144}{5}$. Именно эти ответы приводит Леонардо Пизанский.

180. Пусть ABC данный треугольник (рис. 32). Проведем через его вершины прямые, параллельные противоположным сторонам, получим $\triangle A_1B_1C_1$, у которого точки A, B, C будут серединами соответствующих сторон. Высоты данного треугольника будут перпендикулярны к сторонам полученного треугольника, восстановлены в их серединах и, значит, пересекаются в одной точке (используется свойство серединных перпендикуляров).

181. Решение легко усматривается из рисунка 33, если доказать, что треугольник O_1O_2A равнобедренный при произвольном выборе точки A на прямой BC.

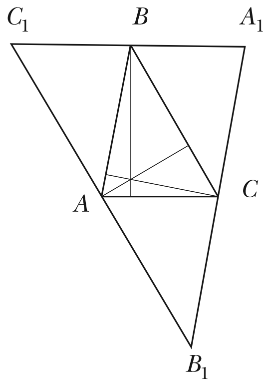


Рис. 32

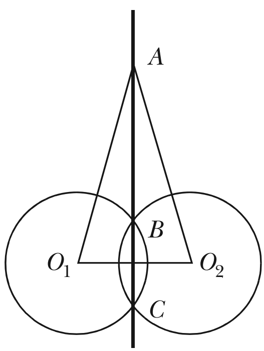


Рис. 33

182. Пусть x, y, z — количество флоринов соответственно у первого, второго и третьего покупателей. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}(y + z) = 12, \\ y + \frac{1}{3}(x + z) = 12, \\ z + \frac{1}{4}(x + y) = 12 \end{cases}$$

дает $x = 3\frac{9}{17}$, $y = 7\frac{13}{17}$, $z = 9\frac{3}{17}$ флоринов.

183. Пример такого магического квадрата изображен на рис. 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 34

Позднее было доказано, что для $n = 4$ существует 880 магических квадратов. А для $n \geqslant 5$ пока неизвестно общее число магических квадратов.

184. На примере магического квадрата 9×9 (рис. 35). Штифель показывает способ их построения для нечетного порядка с помощью окаймлений из $4(n - 1)$, $4(n - 3)$, $4(n - 5)$, ..., 1 клеток, где n — размер магического квадрата. Так как сумма чисел натурального ряда от 1 до n^2 $S_{n^2} = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$, то сумма одного ряда чисел магического квадрата (магическая сумма) равна

$$\frac{S_{n^2}}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Тогда сумма чисел, составляющих первое окаймление:

$$S_{4(n-1)} = 4(n - 1)\frac{n^2 + 1}{2} = 2(n - 1)(n^2 + 1).$$

Сумма чисел второго обхода:

$S_{4(n-3)} = 4(n-3)\dfrac{n^2+1}{2} = 2(n-3)(n^2+1).$

Аналогично находим $S_{4(n-5)} = 2(n-5)(n^2+1).$

Наконец, последний обход (центральная клеточка) содержит число

$S_1 = \dfrac{n^2+1}{2}.$

16	81	79	77	75	11	13	15	2
78	28	65	63	61	25	27	18	4
76	62	36	53	51	35	30	20	6
74	60	50	40	45	38	32	22	8
9	23	33	39	41	43	49	59	73
10	24	34	44	37	42	48	58	72
12	26	52	29	31	47	46	56	70
14	64	17	19	21	57	55	54	68
80	1	3	5	7	71	69	67	66

Рис. 35

При этом все разности между отдельными суммами обходов равны $4(n^2+1)$. Сумма первого обхода $2(n-1)(n^2+1)$ равна сумме чисел натурального ряда от 1 до $2(n-1)$ и сумме дополняющих чисел от $(n^2-2(n-1)+1)$ до n^2. Сумма чисел второго обхода $2(n-3)(n^2+1)$ равна сумме чисел от $(2n-1)$ до $4(n-2)$ и сумме дополняющих чисел от $(n^2-4(n-2)+1)$ до $(n^2-2(n-1))$ и т. д. Для облегчения рассуждений будем каждой клетке квадрата приписывать координаты в виде (x, y), где x — номер горизонтального ряда, y — вертикального. Таким образом, x и y могут принимать только натуральные значения от 1 до n. Для первого обхода Штифель расставляет числа от 1 до $2(n-1)$ и от $(n^2-2(n-1)+1)$

до n^2 следующим образом. На клетки (1, 2), (1, 3), ..., $\left(1, \frac{n+1}{2}\right)$ он ставит последовательно нечетные числа, начиная с единицы до $(n-2)$ включительно. На клетку $\left(\frac{n+1}{2}, 1\right)$ ставится число n. Следующие нечетные числа от $(n+2)$ до $(2n-3)$ заполняют клетки $\left(n, \frac{n+3}{2}\right)$, $\left(n, \frac{n+5}{2}\right)$, ..., $(n, n-1)$. Четными числами 2, 4, ..., $(n-1)$ заполняются клетки (n, n), $(n-1, n)$, ..., $\left(\frac{n+3}{2}, n\right)$. На клетки $\left(\frac{n-1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{n-3}{2}, 1\right)$, ..., (2, 1) ставятся числа $(n+1)$, $(n+3)$, ..., $2(n-2)$. Наконец, замыкает половину первого обхода число $2(n-1)$, помещаемое в клетку $(n, 1)$. Теперь на взаимно противоположных сторонах клетки заполняются числами, дополняющими до (n^2+1). Суммы чисел каждой строки и столбца первого окаймления образуют магическую сумму. Действительно, имеем

$$(n^2-1)+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1+(n-2)}{2}+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n^2-n-1)+(n^2-2n+4)}{2}+$$
$$+n^2-2n+3=2(n-1)+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n^2+(n^2-n+3)}{2}+\frac{n-3}{2}\times$$
$$\times\frac{(n+2)+(2n-3)}{2}+2=2(n-1)+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n^2-3)+(n^2-n+2)}{2}+n+$$
$$+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n+1)+2(n-2)}{2}+(n^2-1)=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2+(n-1)}{2}+(n^2-n+1)+$$
$$+\frac{n-3}{2}\cdot\frac{(n^2-n)+(n^2-2n+5)}{2}+(n^2-2n+3)=\frac{n^3+n}{2}=\frac{S_{n^2}}{n}.$$

Точно так же распределяются числа от $(2n-1)$ до $4(n-2)$ и числа от $[n^2-4(n-2)+1]$ до $[n^2-2(n-1)]$, дополняющие друг друга до (n^2+1), при втором обходе. После второго обхода вновь будем иметь соответствующие суммы. Продолжая дальше, аналогичным путем найдем последующие суммы и число для центральной клеточки, равное $\frac{n^2+1}{2}$.

Заметим, что в истории математики известны различные методы построения магических квадратов нечетного порядка. Среди них наиболее известными являются: индийский метод (опирается на построение своеобразной «лесенки»), метод византийского математика XIII–XIV вв. Мосхопулоса (использует «ход коня»), метод альфила (основан на правиле движения старинной шахматной фигуры альфила – предка современного слона), метод Баше (метод террас). Все эти изящные методы являются частными случаями общего, так называемого линейного метода построения магических квадратов нечетного порядка. Одним из лучших и наиболее общим является квазилинейный метод французского математика и механика Ф. де Лагира (1640–1718) [37].

186. $3 + \sqrt{2}$.

187. Из точки A данным радиусом на прямой AB делаем засечку D (рис. 36). Далее из точки B тем же радиусом и на той же прямой AB делаем другую засечку E. Затем на отрезках BE и AD строим равносторонние треугольники EFB и AGD. Точка пересечения прямых BF и AG – точка C – дает третью вершину искомого равностороннего треугольника ABC.

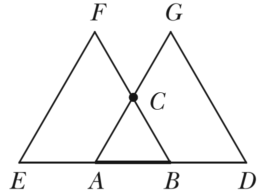


Рис. 36

188. В задаче предполагается построение двух внешних (A_1B_1 и A_2B_2 на рис. 37) и двух внутренних ($A'B'$ и $A''B''$ на рис. 38) общих касательных к двум окружностям.

Построение внешней касательной A_1B_1 (см. рис. 37) можно выполнить следующим образом: описываем окружность с центром в точке O_2 радиусом, равным разности данных радиусов; из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C_1; через точку

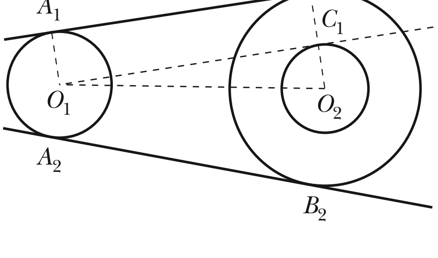


Рис. 37

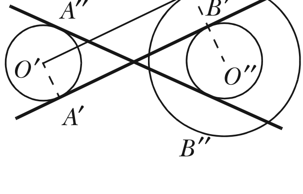


Рис. 38

касания C_1 проводим радиус O_2C_1 и продолжаем его до пересечения с данной окружностью в точке B_1. Наконец, из B_1 проводим A_1B_1 параллельно O_1C_1.

Аналогично можно построить другую внешнюю касательную A_2B_2.

Для построения внутренней касательной $A'B'$ (см. рис. 38) описываем окружность с центром в точке O'' радиусом, равным сумме данных радиусов; из O' проводим к этой окружности касательную $O'C'$; точку касания C' соединяем с O''; наконец, через точку B', в которой $O''C'$ пересекается с данной окружностью, проводим $A'B' \parallel O'C'$.

Аналогично можно построить другую внутреннюю касательную $A''B''$.

189. $\sin nx = \sin((n-1)x + x) = \sin(n-1)x \cdot \cos x + \cos(n-1)x \times \sin x = \sin x \cdot \cos(n-1)x + \sin(n-2)x + \sin x \cdot \cos(n-1)x = 2\sin x \cdot \cos(n-1)x + \sin(n-2)x$.

190—192. Решаются аналогично 189.

193. Пусть R, H и V обозначают соответственно радиус, высоту и объем цилиндра. Так как

$$d^2 = (2R)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2 = 2\left(R^2 + R^2 + \frac{H^2}{8}\right),$$

то

$$V^2 = \pi^2 R^4 H^2 = 8\pi^2 \cdot R^2 \cdot R^2 \cdot \frac{H^2}{8} \leqslant 8\pi^2 \left(\frac{R^2 + R^2 + \frac{H^2}{8}}{3}\right)^3 = 8\pi^2 \left(\frac{d^2}{6}\right)^3.$$

Отсюда $V_{\max} = \dfrac{\pi d^3}{3\sqrt{3}}$, когда $R^2 = \dfrac{H^2}{8} = \dfrac{d^2}{6}$.

194. Доказательство можно провести методом математической индукции.

195. Выигрышная стратегия для первого игрока обеспечивается выбором чисел, при котором суммы всех названных чисел таковы: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.

196. Два способа решения задачи удобно представить последовательными тройками чисел:

1) (8, 0, 0); (3, 5, 0); (3, 2, 3); (6, 2, 0); (6, 0, 2); (1, 5, 2); (1, 4, 3); (4, 4, 0);

2) (8, 0, 0); (5, 0, 3); (5, 3, 0); (2, 3, 3); (2, 5, 1); (7, 0, 1); (7, 1, 0); (4, 1, 3); (4, 4, 0).

197. На рисунке 39 видно, как можно построить искомый отрезок $x = \frac{a}{b}$, используя пропорцию $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$.

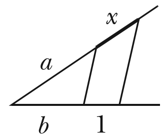


Рис. 39

198. $\lg a + \lg 2 + 2\lg \sin \frac{90^\circ + \varphi}{2} = \lg a + \lg 2\sin^2 \frac{90^\circ + \varphi}{2} = \lg a + \lg (1 - \cos (90^\circ + \varphi)) = \lg a + \lg (1 + \sin \varphi) = \lg a + \lg \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \lg a + \lg \frac{a+b}{a} = \lg (a + b)$.

199. $\lg a + \lg \cos 2\varphi = \lg a + \lg (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \lg a + \lg \left(1 - \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a}\right) = \lg a + \lg \left(1 - \frac{b}{a}\right) = \lg a + \lg \frac{a-b}{a} = \lg (a - b)$.

200. Рассуждения удобно начать с конца и решение можно представить в виде следующей таблицы:

I	8	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{4}{2} = 2$	$2 + \frac{14}{2} + \frac{8}{2} = 13$
II	8	$\frac{8}{2} = 4$	$4 + \frac{4}{2} + \frac{16}{2} = 14$	$\frac{14}{2} = 7$
III	8	$8 + \frac{8}{2} + \frac{8}{2} = 16$	$\frac{16}{2} = 8$	$\frac{8}{2} = 4$

Значит, сначала у каждого было соответственно 13, 7 и 4 экю.

201. Имеем

$$S = \frac{q_1}{1 - q}, \qquad (1)$$

где q — знаменатель прогрессии,

$$S - q_1 = \frac{q_1}{1-q} - q_1 = \frac{q_1 q}{1-q} = \frac{q_2}{1-q}. \qquad (2)$$

Искомый результат получим почленным делением (1) на (2).

203. $\tau(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

204. $S(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = \frac{p_1^{\alpha_1 + 1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2 + 1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k + 1} - 1}{p_k - 1}$.

205. Пусть при делении 10 на число n получается остаток r_1, при делении $10r_1$ на n — остаток r_2, при делении $10r_2$ на n — остаток r_3 и т. д. Если данное число, например трехзначное, будет иметь вид $\overline{abc}$, где a, b, c — цифры сотен, десятков и единиц, то общий признак делимости этого числа на n следующий.

Если $c + br_1 + ar_2$ делится на n (кратно n), то на n делится и число $\overline{abc}$. В самом деле, пусть

$10 = nq_1 + r_1,$

$10r_1 = nq_2 + r_2.$

Тогда

$$c + br_1 + ar_2 = c + b(10 - nq_1) + a(10r_1 - nq_2) =$$
$$= c + 10b + 100a - n(bq_1 + 10aq_1 + aq_2).$$

Значит, $c + 10b + 100a$ кратно n.

206. Первый даст 1200, второй 800, третий 400 ливров.

207. Пусть $\frac{m}{q}$, m, mq — три члена геометрической прогрессии. По условию

$$\begin{cases} \dfrac{m}{q} + m + mq = 19, \\ \dfrac{m^2}{q^2} + m^2 + m^2q^2 = 133. \end{cases}$$

Положив $x = q + \frac{1}{q}$, получим

$$\begin{cases} m(x + 1) = 19, \\ m^2(x^2 - 1) = 133. \end{cases}$$

Отсюда $x = \frac{19}{m} - 1$ и $x^2 = \frac{133}{m^2} + 1$.

Далее имеем $\left(\frac{19}{m} - 1\right)^2 = \frac{133}{m^2} + 1$. Поэтому $m = 6$, $x = 2\frac{1}{6}$. Наконец, $q_1 = \frac{2}{3}$ и $q_2 = \frac{3}{2}$.

Условиям задачи удовлетворяют две тройки чисел: 9, 6, 4 и 4, 6, 9.

208. По условию имеем

$$\begin{cases} a + aq^3 = 13, \\ aq + aq^2 = 4. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим два ответа:
$\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{5}, \frac{64}{5}$ и $\frac{64}{5}, \frac{16}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}$.

209. Обозначим прирост травы с 1 га за 1 неделю через y. Тогда прирост травы на первом лугу за 4 недели составит $13\frac{1}{3}y$, что будет равносильно увеличению первоначальной площади первого луга до $\left(3\frac{1}{3} + 13\frac{1}{3}y\right)$ га. 1 корова за 1 неделю съест $\frac{1}{48}$ всей травы на первом лугу, т. е. столько травы, сколько ее росло на лугу площадью

$$\frac{1}{48}\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right) = \frac{10 + 40y}{144} \text{ га.}$$

Аналогичный подсчет для второго луга даст, что 1 корова за 1 неделю съест травы с луга площадью $\frac{10 + 90y}{189}$ га.

Исходя из предположения, что все коровы в день съедают одно и то же количество травы, получим уравнение

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189}.$$

Отсюда $y = \frac{1}{12}$. Найдем площадь пастбища, способного прокормить 1 корову в течение 1 недели:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{5}{54} \text{ га.}$$

Наконец, для третьего луга получим

$$\frac{24 + 24 \cdot 18 \cdot \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54},$$

где x — число коров, которых можно пасти на третьем лугу в течение 18 недель. Отсюда $x = 36$.

210. 35 миль.

211. $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Если n не делится на 5, то возможные формы этого числа $5k \pm 1$ и $5k \pm 2$; n^2 дает

$25k^2 \pm 10k + 1$ и $25k^2 \pm 20k + 4$, т. е. $n^2 - 1$ кратно 5 или $n^2 + 1$ кратно 5, следовательно, либо $n^2 - 1$, либо $n^2 + 1$ делится на 5.

212. Решается аналогично задаче 211.

214. Из условия $\lg \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}(\lg a - \lg b)$ имеем последовательно:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{a}{b} \text{ и } \sin^2 \varphi = \frac{a}{a + b}.$$

С другой стороны,

$$\lg a - 2\lg \sin \varphi = \lg a - \lg \sin^2 \varphi = \lg a - \lg \frac{a}{a + b} = \lg (a + b).$$

215. Построим правильную шестигранную призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и дополнительно «донышко» в форме трехгранного наугольника $LGAHCJE$, грани которого — ромбы (рис. 40). Пусть $AB = a$, $AA_1 = b$. Найдем величину $x = LO$, при которой площадь поверхности ячейки будет наименьшей. Площадь поверхности многогранника $LGAHCJEE_1F_1A_1B_1C_1D_1$, не считая площади нижнего основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, будет равна

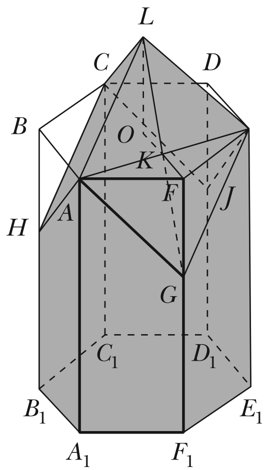


Рис. 40

$$\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 3a(2b - x) =$$

$$= 3a\left(\frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} + 2b - x\right).$$

Отсюда при $x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ минимальная площадь равняется

$$6ab + \frac{3a^2}{\sqrt{2}}.$$

С другой стороны, из треугольника GFK следует:

$FG : FK : KG = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Углу FKG, равному $35°15'12''$, соответствует угол ромба $109°28'$, который пчелы избрали для постройки донышек ячеек, получив наименьшую площадь наугольника. Разность между площадью поверхности шестиугольной призмы без нижнего основания и минимальной площадью поверхности ячейки составляет

$\frac{3}{2}a^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ и дает пчелам-«математикам» около 2% экономии воска.

Заметим, что И. С. Кёниг методом дифференциального исчисления нашел значения углов ромба донышек пчелиных сот (109°26′ и 70°34′ вместо 109°28′ и 70°32′). На ошибку И. С. Кёнига указал в 1736 г. шотландский математик К. Маклорен.

216. Если x — число дней, отработанных работником, то

$48x - 12(30 - x) = 0$, $x = 6$.

217. Если в тождественном сравнении

$(x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(n-1)) \equiv x^{n-1} - 1 \pmod{n}$

положить $x = 0$, тогда $(n-1)! + 1$ делится на n. Если же n составное, то оно содержит простой множитель $q < n$. Тогда q является делителем $(n-1)!$, но $(n-1)! + 1$ не делится на q, а значит, и на n [85, с. 99–102].

218. $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 + 2n) \times \times (n^2 + 2 - 2n)$, где $n^2 + 2 + 2n = (n+1)^2 + 1 \neq 1$ и $n^2 + 2 - 2n = (n-1)^2 + 1 \neq 1$.

Таким образом, $n^4 + 4$ имеет два различных делителя, отличных от него самого и единицы. Следовательно, это число составное.

219. Два способа решения задачи можно представить в виде:

1) (12, 0, 0); (4, 8, 0); (4, 3, 5); (9, 3, 0); (9, 0, 3); (1, 8, 3); (1, 6, 5); (6, 6, 0).

2) (12, 0, 0); (7, 0, 5); (0, 7, 5); (0, 8, 4); (8, 0, 4); (8, 4, 0); (3, 4, 5); (3, 8, 1); (11, 0, 1); (11, 1, 0); (6, 1, 5); (6, 6, 0).

220. Приведем основные расстановки восьми ферзей:

*a*4,	*b*1,	*c*5,	*d*8,	*e*2,	*f*7,	*g*3,	*h*6;
*a*4,	*b*1,	*c*5,	*d*8,	*e*6,	*f*3,	*g*7,	*h*2;
*a*4,	*b*2,	*c*5,	*d*8,	*e*6,	*f*1,	*g*3,	*h*7;
*a*4,	*b*2,	*c*7,	*d*3,	*e*6,	*f*8,	*g*1,	*h*5;
*a*4,	*b*2,	*c*7,	*d*3,	*e*6,	*f*8,	*g*5,	*h*1;
*a*4,	*b*2,	*c*7,	*d*5,	*e*1,	*f*8,	*g*6,	*h*3;
*a*4,	*b*2,	*c*8,	*d*5,	*e*7,	*f*1,	*g*3,	*h*6;
*a*4,	*b*2,	*c*8,	*d*6,	*e*1,	*f*3,	*g*5,	*h*7;
*a*4,	*b*6,	*c*1,	*d*5,	*e*2,	*f*8,	*g*3,	*h*7;
*a*4,	*b*7,	*c*5,	*d*2,	*e*6,	*f*1,	*g*3,	*h*8;
*a*4,	*b*8,	*c*1,	*d*5,	*e*7,	*f*2,	*g*6,	*h*3;
*a*4,	*b*6,	*c*8,	*d*2,	*e*7,	*f*1,	*g*3,	*h*5.

Заметим, что последняя расстановка является симметричной. Поэтому все возможные расстановки восьми ферзей на шахматной доске, не угрожающих друг другу, получаются из 12 основных поворотами (вращениями) на 90°, 180°, 270° и зеркальными отражениями. Всего $11 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 92$ расстановки.

Задача о ферзях привлекала внимание К. Гаусса. Полный набор решений, состоящий из 92 позиций, получил проф. Ф. Наук (слепой от рождения) в 1850 г. Наконец, в 1874 г. английский математик Дж. У. Л. Глэшер с помощью теории определителей доказал, что 92 решения исчерпывают все возможности.

221. В пятиугольнике $ABCDE$ (рис. 41) проведем $CF \perp AE$, $FG \parallel CE$ и обозначим $FG = a$ и $CE = b$. Имеем $S_{\triangle CFG} : S_{\triangle CEF} = a : b$. Как видно, исходная задача свелась к делению трапеции $CEFG$ прямой (на рис. 41 — HK), параллельной основаниям, на две части, площади которых относятся между собой как $a : b$.

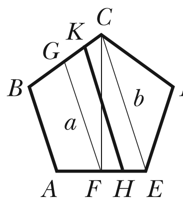


Рис. 41

Обозначим отрезок $HK = c$, расстояние от HK до GF через x, расстояние от HK до CE через y. Имеем

$$S_{HFGK} : S_{EHKC} = a : b \text{ или } \frac{a+c}{2}x : \frac{b+c}{2}y = a : b.$$

Отсюда $(a + c)bx - (b + c)ay = 0$.

С другой стороны, применяя к трапеции теорему о пучке прямых, пересекающих параллельные прямые, получим

$$x : y = (c - a) : (b - c),$$

или

$$(b - c)x - (c - a)y = 0.$$

Чтобы система двух линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (a + c)bx - (b + c)ay = 0, \\ (b - c)x - (c - a)y = 0 \end{cases}$$

имела отличные от нуля решения, должно выполняться условие

$$(a + c)b : (b - c) = (b + c)a : (c - a).$$

Из последнего получаем

$$(c^2 - a^2)b = (b^2 - c^2)a \text{ или } c = \sqrt{ab}.$$

Наконец, длина c отрезка HK, делящего площадь трапеции $CEFG$ в отношении $a : b$, найдется как среднее геометрическое длин a и b оснований трапеций (рис. 42).

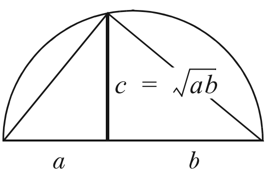


Рис. 42

222. Из точки M раствором циркуля, равным длине диаметра данной окружности, проведем окружность, которая пересечет данную в точках C и C' (рис. 43). Соединив эти точки с точкой O и продолжив полученные отрезки CO и $C'O$ до пересечения с окружностью соответственно в точках A и A', получим секущие AM и $A'M$, которые и будут искомыми.

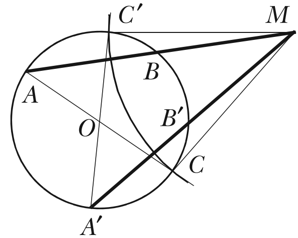


Рис. 43

223. Для двухбуквенного слова a_1a_2 имеется только одна возможность: (a_1a_2). Для трехбуквенного слова $a_1a_2a_3$ имеются две возможности: $((a_1a_2)a_3)$ и $(a_1(a_2a_3))$. Для четырехбуквенного слова искомых расстановок скобок будет пять: $(a_1(a_2(a_3a_4)))$, $(a_1((a_2a_3)a_4))$, $((a_1a_2)(a_3a_4))$, $(((a_1a_2)a_3)a_4)$ и $((a_1(a_2a_3))a_4)$. Можно убедиться, что для $n = 5$ будет 14 возможных расстановок скобок. Как видно, число расстановок скобок в n-буквенных словах при $n = 2, 3, 4, 5$ равно: 1, 2, 5, 14, т. е. получаются начальные числа Каталана (см. задачу 245). Сопоставив каждую букву n-буквен-ного слова $a_1a_2...a_n$ со сторонами выпуклого n-угольника, получим, что задача Каталана о расстановке скобок сводится к задаче Эйлера о «скобочной» триангуляции многоугольника, и наоборот [26].

224. 137 256 (см. решение аналогичной задачи № 101).

225. 312 месяцев; 1356 недель; 9497 дней; 227 928 часов.

226. Пусть емкости бочки, насадки и ведра равны соответственно x, y, z. Тогда имеем

$$\begin{cases} x + 20z = 3x, \\ 19x + y + 15{,}5z = 20x + 8z. \end{cases}$$

Отсюда $x = 4y$, т. е. в одной бочке содержится 4 насадки.

227. 36.

228. Составитель рукописи решает задачу так: за 12 лет первый плотник построит 12 дворов, второй — 6; третий — 4 и четвертый — 3. Следовательно, за 12 лет вместе они построят 25 дворов. Таким образом, четыре плотника вместе один двор построят за $\frac{365 \cdot 12}{25} = 175\frac{1}{5}$ дня.

229. В авторском решении все суммы переводятся в копейки и определяется число мужчин 40 = (1200 – 120 • 9) : (12 – 9) и женщин 80 = 120 – 40. Проверка решения задачи 12 • 40 + 9 • 80 = 1200 заканчивается одним словом: «Правда».

230. Магницкий решает эту задачу по правилу двух ложных положений. Это правило в применении к линейному уравнению с одним неизвестным ($ax = b$) заключается в том, что неизвестному приписываются два отличных от истинного значения x_1 и x_2, порождающие при подстановке в левую часть ошибки d_1 и d_2:

$ax_1 = b + d_1$, $ax_2 = b + d_2$.

Отсюда легко получить пропорцию $\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{d_1}{d_2}$ и значение x:

$$x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}. \qquad (1)$$

Во-первых, предположим, что учеников было 24 ($x_1 = 24$). Тогда согласно условию задачи у учителя будет всего

24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67 (учеников).

По условию же задачи учеников должно быть 100, следовательно, их недостает 33 (первая погрешность d_1). Во-вторых, предположим, что учеников было 32 ($x_2 = 32$). Тогда в итоге получим

32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89 (учеников),

а недостаток будет 11 (вторая погрешность d_2). Далее по формуле (1) получим:

$x = \frac{24 \cdot 11 - 32 \cdot 33}{11 - 33} = 36$ (учеников).

231. Пусть x — искомое число, тогда по условию задачи

$$\begin{aligned} x &= 2q_1 + 1, & \qquad & x + 1 = 2(q_1 + 1),\\ x &= 3q_2 + 2, & \text{или} \qquad & x + 1 = 3(q_2 + 1),\\ x &= 4q_3 + 3, & & x + 1 = 4(q_3 + 1),\\ x &= 5q_4 + 4 & & x + 1 = 5(q_4 + 1). \end{aligned}$$

Из последних четырех соотношений видно, что $(x + 1)$ делится без остатка на 2, 3, 4, 5. Следовательно, наименьшее значение $x + 1$ равняется наименьшему общему кратному чисел 2, 3, 4, 5, т. е. 60. Поэтому наименьшее искомое число $x = 59$.

232. Человек выпивает в день $\frac{1}{14}$ кади, а вместе с женою $\frac{1}{10}$ кади. Следовательно, жена выпивает в день $\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}$ кади. Таким образом, всю кадь жена выпьет за 35 дней.

233. Имеем

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(a+1)^n}+\ldots=\frac{1}{(a+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}=$$

$$=\frac{1}{a(a+1)}.$$

Искомая сумма — это сумма ряда $\sum\limits_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a(a+1)}$. Так как

$$\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1},$$

то

$$S_a=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)=1-\frac{1}{a+1}.$$

Отсюда $\lim\limits_{a\to\infty}S_a=1$.

234. Если x — число лошадей, y — число быков, то

$$31x+21y=1770,$$

откуда

$$y=84-x-\frac{10x-6}{21}.$$

Из последнего равенства следует, что $(5x-3)$ делится на 21. Обозначив $5x-3=21z$, получим $y=84-x-2z$ и $x=4z+\frac{z+3}{5}$. Следовательно, $(z+3)$ делится на 5, т. е. $z=5t-3$, $x=21t-12$ и $y=102-31t$. Так как $y>0$ и $z=5t-3\neq 0$, то при $t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=3$ соответственно $x_1=9$, $y_1=71$; $x_2=30$, $y_2=40$; $x_3=51$, $y_3=9$.

235. П. Ферма высказал предположение, что все числа вида

$$F(n)=2^{2^n}+1$$

являются простыми. При $n=0, 1, 2, 3, 4$ числа Ферма $F(0)=3$, $F(1)=5$, $F(2)=17$, $F(3)=257$ и $F(4)=65\,537$ действительно простые. Но уже Л. Эйлер разложил на простые множители число

$$F(5)=2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\cdot 6\,700\,417.$$

К. Гаусс доказал, что правильный n-угольник с нечетным числом вершин может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число n является простым числом Ферма или произведением нескольких различных простых чисел Ферма. В своих «Арифметических исследованиях» (1801) Гаусс указал метод построения циркулем и линейкой правильного

17-угольника. Рело и Гермес разработали соответственно метод построения циркулем и линейкой правильных 257- и 65 537-угольников.

Позднее, в основном с помощью ЭВМ, среди чисел Ферма для $n > 5$ были обнаружены другие составные числа. До сих пор неизвестно, существует ли конечное число простых чисел Ферма или их бесконечно много. Подробнее см. [85].

236. Если острова как бы сжать в точки, а мосты вытянуть в линии, то получим фигуру в виде геометрической сети (рис. 44). Решение задачи сводится к вычерчиванию одним росчерком линии, состоящей из семи дуг, что невозможно, так как в каждой из четырех вершин A, B, C, D сходится число дуг, равное 3 или 5. Положительное решение, как доказал Эйлер, имеется только в случае, если каждая из вершин A, B, C, D связана с четным числом дуг.

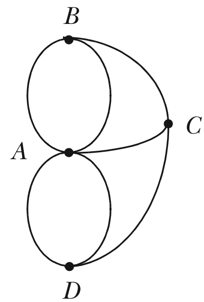


Рис. 44

237. В справедливости тождества можно убедиться раскрытием скобок в обеих частях.

238. Пусть точки D, E, F — основания медиан треугольника ABC, G, H и J — основания высот, K — ортоцентр, L, M, N — середины отрезков AK, BK, CK (рис. 45). Через точки D, E и F проведем окружность. Так как отрезок EG — медиана прямоугольного треугольника BGC, то $EG = \frac{1}{2}BC$, следовательно, $EG = DF$. Трапеция $GDEF$ равнобедренная, поэтому окружность, проходящая через три ее вершины D, E и F, пройдет и через четвертую вершину G. Отрезки $NE \parallel BG$, $DE \parallel AC$, $FN \parallel AJ$ и $DF \parallel BC$ (как средние линии соответствующих треугольников). Отсюда $\angle NFD = 90°$, $\angle NFD + \angle NED = 180°$. Таким

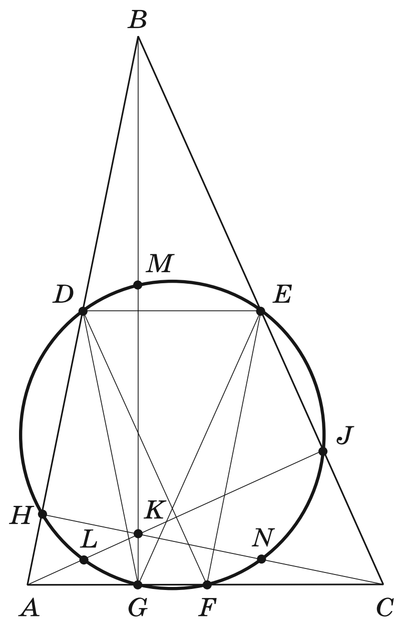


Рис. 45

образом, около четырехугольника $FDEN$ можно описать окружность, т. е. N принадлежит той же окружности, что и D, E, F.

Аналогичным образом можно доказать, что эта окружность пройдет через точки H, M, J и L.

239. Пусть (рис. 46) A_1, B_1, C_1 — основания медиан треугольника ABC, M — точка пересечения медиан; K — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности. Так как медианы треугольника делятся в точке их пересечения в одном и том же отношении, то точка M есть центр гомотетии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Эта гомотетия преобразует высоты треугольника ABC соответственно в высоты треугольника $A_1B_1C_1$, так как перпендикулярность прямых сохраняется при гомотетии. Но высоты треугольника $A_1B_1C_1$ как серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC пересекаются в центре описанной около треугольника ABC окружности. Следовательно, при гомотетии точка K преобразуется в точку O. А соответственные в гомотетии точки лежат на одной прямой с центром гомотетии.

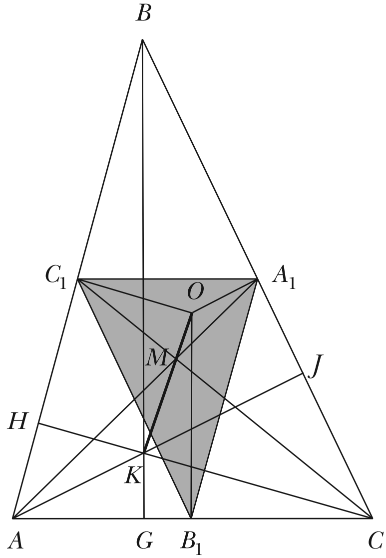


Рис. 46

240. Положим $y = kx$. Тогда последовательно имеем

$$(kx)^x = x^{kx},\ kx = x^k,\ k = x^{k-1},\ x = k^{\frac{1}{k-1}},\ y = k^{\frac{k}{k-1}}.$$

Пусть $\dfrac{1}{k-1} = n$. Отсюда $k = \dfrac{n+1}{n}$ и, следовательно,

$$x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,\ y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

241. $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$.

Разложение числа e в цепную дробь Эйлером было получено в 1737 г., но до сих пор еще неизвестен общий вид элементов разложения числа π в цепную дробь.

242. Требуемое каре невозможно выстроить. В этом можно убедиться скрупулезным перебором всех возможных вариантов построения каре. Подробнее см. [5].

Эйлер доказал, что ортогональные пары латинских квадратов существуют для всех нечетных значений n и для таких четных значений n, которые делятся на 4. Недавно было показано, что для любого n, кроме $n = 6$, существуют ортогональные квадраты размером $n \times n$. Теория латинских квадратов нашла многочисленные применения в математике и ее приложениях.

243. Число расстановок n ладей на доске размером $n \times n$ клеток без запрета расстановок их на главной диагонали равно числу перестановок, т. е. $P_n = n!$

В частности для обычной шахматной доски $P_8 = 8! = 40\,320$. Сложнее дело обстоит с расстановкой ладей на доске, когда ни одна из них не может стоять на главной диагонали. Обозначим через Q_n, $n \geqslant 2$, количество расстановок n ладей на шахматной доске размером $n \times n$ клеток с условием, что каждые две ладьи не угрожают друг другу и ни одна ладья не стоит на главной диагонали. Тогда $Q_2 = 1$, $Q_3 = 2$. Для $n \geqslant 4$ Эйлер доказал рекуррентное соотношение

$$Q_n = (n-1)(Q_{n-1} + Q_{n-2}). \tag{1}$$

Приведем классическое рассуждение Эйлера. В первом столбце шахматной доски $n \times n$ клеток ладья может занимать только $n-1$ позицию, так как самая нижняя клетка столбца принадлежит главной диагонали и ставить на нее ладью запрещено по условию. Пусть ладья занимает k-ю клетку в первом столбце. Относительно главной диагонали рассмотрим клетку, симметричную k-й клетке первого столбца. Если рассматриваемая клетка не занята ладьей, то расстановку ладей отнесем к первой группе, если занята — ко второй. При $n = 4$ и $k = 2$ к первой группе относится расстановка $a2$, $b3$, $c4$, $d1$, а ко второй группе — $a2$, $b1$, $c4$, $d3$. Если удалить из доски k-ю строку, заменив ее первой, и отбросить первый столбец, то получится доска размером $(n-1) \times (n-1)$ клеток. Каждая расстановка ладей из первой группы дает после этих преобразований некоторую расстановку ладей на новой доске, удовлетворяющую условию задачи, и наоборот. Следовательно, первая группа расстановок ладей содержит в точности Q_{n-1} расстановок. Для подсчета количества расстановок ладей во второй группе удалим из доски первые и k-е столбцы и строки, а оставшиеся сдвинем не меняя их порядка; получим доску размером $(n-2)\times(n-2)$ клетки. Каждая расстановка ладей из второй группы даст при этом некоторую расстановку ладей на новой доске, удовлетворяющую условию задачи, и наоборот. Поэтому вторая группа будет содержать Q_{n-2} расстановок ладей.

Итак, имеется $Q_{n-1}+Q_{n-2}$ расстановок ладей на доске размером $n\times n$, которые отвечают условиям задачи и у которых ладья стоит на пересечении первого столбца и k-й строки. Наконец, так как k принимает $n-1$ значение $(2, 3, ..., n)$, то получаем рекуррентное соотношение (1).

Для обычной шахматной доски имеем последовательно:

$Q_2 = 1,$

$Q_3 = 2,$

$Q_4 = (4-1)(Q_3+Q_2) = 3(2+1) = 9,$

$Q_5 = (5-1)(Q_4+Q_3) = 4(9+2) = 44,$

$Q_6 = (6-1)(Q_5+Q_4) = 5(44+9) = 265,$

$Q_7 = (7-1)(Q_6+Q_5) = 6(265+44) = 1854,$

$Q_8 = (8-1)(Q_7+Q_6) = 7(1854+265) = 14\,833.$

Формула для расстановки n ладей, кроме главной диагонали, не угрожающих друг другу, была найдена в XIX в. и имеет вид:

$$Q_n = n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-...+\frac{(-1)^n}{n!}\right). \tag{2}$$

В частности,

$$Q_n = 8!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right) = 14\,833.$$

Заметим, наконец, что формулу (2) можно доказать методом математической индукции, опираясь на рекуррентное соотношение Эйлера (1).

244. Возможен, например, такой маршрут шахматного коня: *a*8 – *c*7 – *e*8 – *g*7 – *h*5 – *g*3 – *h*1 – *f*2 – *d*1 – *b*2 – *a*4 – *b*6 – *c*8 – *e*7 – *g*8 – – *h*6 – *g*4 – *h*2 – *f*1 – *d*2 – *b*1 – *a*3 – *b*5 – *a*7 – *c*6 – *d*8 – *e*6 – *f*8 – *h*7 – *g*5 – – *h*3 – *g*1 – *e*2 – *c*1 – *a*2 – *b*4 – *a*6 – *b*8 – *d*7 – *e*5 – *f*7 – *h*8 – *g*6 – *h*4 – *f*3 – – *d*4 – *f*5 – *d*6 – *c*4 – *a*5 – *b*7 – *c*5 – *b*3 – *a*1 – *c*2 – *e*3 – *g*2 – *e*1 – *d*3 – *f*4 – – *d*5 – *f*6 – *e*4 – *c*3.

Однако до сих пор не удалось определить точное число маршрутов шахматного коня. Доказано лишь, что их число не менее 31 054 144 и не больше чем C_{168}^{63}.

245. Обозначим через K_n число способов разбиения n-угольника на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри его. Рассмотрим $(n+1)$-угольник и зафиксируем какую-либо его сторону, например A_1A_2. Возможны три случая разбиения $(n+1)$-угольника на треугольники.

1) Если в разбиение входит $\triangle A_1A_2A_3$, то имеется K_n способов разбиения на треугольники $(n+1)$-угольника (рис. 47).

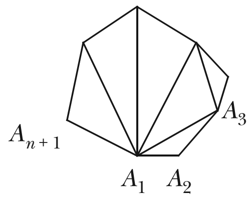


Рис. 47

2) Если в разбиение входит $\triangle A_1A_2A_{k+1}$, где $k = 3, ..., n - 1$ (рис. 48), то диагональ A_2A_{k+1} отсекает от $(n + 1)$-угольника k-угольник $A_2A_3... A_{k+1}$, а диагональ A_1A_{k+1} — $(n - k + 2)$-угольник $A_{k+1}A_{k+2}... A_{n+1}A_1$. Так как при разбиении $(n + 1)$-угольника можно комбинировать произвольное разбиение k-угольника с произвольным разбиением $(n - k + 2)$-угольника, то общее число разбиений с треугольником $A_1A_2A_{k+1}$ будет равно K_kK_{n-k+2}.

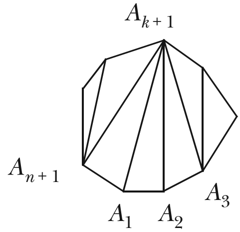


Рис. 48

3) Если в разбиение входит $\triangle A_1A_2A_{n+1}$, то имеется, как и в первом случае, K_n способов разбиения $(n + 1)$-угольника на треугольники. Таким образом, общее число способов разбиения $(n + 1)$-угольника на треугольники равно

$$K_{n+1} = 2K_n + K_3K_{n-1} + K_4K_{n-2} + ... + K_{n-1}K_3. \qquad (1)$$

Подсчитаем число m диагоналей, участвующих в разбиении n-угольника. Число сторон получаемых треугольников равно $3(n - 2)$. Так как каждая диагональ n-угольника является стороной двух треугольников и каждая сторона n-угольника является стороной одного треугольника, то

$$3(n-2) = 2m + n.$$

Поэтому число диагоналей $m = n - 3$ не зависит от способа разбиения. Суммируя теперь число разбиений

$$(K_3K_{n-1} + K_4K_{n-2} + ... + K_{n-1}K_3),$$

в которых участвует данная диагональ, по всем диагоналям и учитывая, что каждое разбиение будет сосчитано столько раз, сколько диагоналей участвует в этом разбиении, мы получим

$$\frac{n}{2}(K_3K_{n-1} + K_4K_{n-2} + \ldots + K_{n-1}K_3) = (n-3)K_n. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем $\frac{n}{2}(K_{n+1} - 2K_n) = (n-3)K_n$

или

$$K_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n}K_n = \frac{2(2n-3)\cdot 2(2n-5)}{n(n-1)}K_{n-1} =$$

$$= \frac{2(2n-3)\cdot 2(2n-5)\cdot 2(2n-7)}{n(n-1)(n-2)}K_{n-2} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{2(2n-3)\cdot 2(2n-5)\cdot 2(2n-7)\cdot\ldots\cdot 2(2n-(2n-3))}{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-3))}K_3 =$$

$$= 2^{n-2}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot n}\cdot 1 = 2^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!}.$$

Итак, число способов разбиения n-угольника на треугольники, не пересекающиеся внутри диагоналями, равно

$$K_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{(n-1)!}2^{n-2}. \qquad (3)$$

Члены последовательности: 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ..., которые определяются формулой (3), называются *числами Каталана* (см. задачу 223). Формулу (3) можно записать и по-другому. Например:

$$K_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-6)(2n-5)}{(n-1)!2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-6)}2^{n-2} = \frac{(2n-5)!2^{n-2}}{(n-1)!2^{n-3}\cdot(n-3)!}$$

$$= = \frac{2}{n-1}\cdot\frac{(2n-5)!}{(n-2)!(n-3)!} = \frac{2}{n-1}C_{2n-5}^{n-3} = \frac{2}{n-1}C_{2n-5}^{n-2}; \qquad (4)$$

$$K_n = \frac{(2n-5)!2}{(n-1)!(n-3)!} = \frac{(2n-4)!}{(n-2)(n-1)!(n-3)!} = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{(2n-4)!}{(n-2)^2} = \frac{1}{n-1}C_{2n-4}^{n-2} = \frac{1}{n-2}\cdot\frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-3)!} =$$

$$= \frac{1}{n-2}\cdot C_{2n-4}^{n-3} = \frac{1}{n-2}C_{2n-4}^{n-1}; \qquad (5)$$

$$K_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} = \frac{1}{2n-3}\cdot\frac{(2n-3)!}{(n-1)!(n-2)!} = \frac{1}{2n-3}C_{2n-3}^{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2n-3}C_{2n-3}^{n-1}. \qquad (6)$$

Заметим, наконец, что при больших значениях n подсчет числа K_n по формулам (3), (4), (5), (6) требует больших затрат труда.

С помощью формулы шотландского математика Джеймса Стирлинга (1692—1770)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

можно получить приближенную формулу для K_n при больших n:

$$K_n = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(2n-4)!}{((n-2)!)^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2(2-n)}(2(n-2))^{2(n-2)}e^{-2(n-2)}}{(n-1)(\sqrt{2\pi(n-2)}(n-2)^{n-2}e^{-(n-2)})^2} =$$

$$= \frac{2^{2(n-2)}}{(n-1)\sqrt{\pi(n-2)}}.$$

246. Пусть x — число косцов артели, y — размер участка, скашиваемого одним косцом за один день. Площадь большого луга равняется

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4},$$

площадь малого луга

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}.$$

По условию имеем: $\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2$,

откуда $x = 8$.

247. В 1781 г.

248. Иван Петров решил эту задачу всеми шестью способами:

1) $3 \cdot 26$;
2) $3 \cdot 21 + 5 \cdot 3$;
3) $3 \cdot 16 + 5 \cdot 6$;
4) $3 \cdot 11 + 5 \cdot 9$;
5) $3 \cdot 6 + 5 \cdot 12$;
6) $3 \cdot 1 + 5 \cdot 15$.

К главе III

Ошибка не есть еще лженаука.
Лженаука — это непризнание ошибок.

Л. Капица

249—251. В этих задачах Пачоли делит ставку пропорционально набранным очкам (или партиям). Если два игрока к моменту прекращения игры выиграли соответственно m и n партий, то ставка делилась в отношении $m : n$ независимо от того, сколько партий им оставалось сыграть. Как видно, Пачоли лишь молчаливо предполагал равновероятность выигрыша любой партии (очка) каждым из участников игры. Такие решения ошибочно считались правильными, хотя при этом ставки делились не в соответствии с вероятностями выиграть всю ставку при продолжении игры.

В 1539 г. Джироламо Кардано (1501—1576) в работе «Практика общей арифметики», изданной в Милане, правильно указывал, что Пачоли, деля ставку пропорционально числу уже выигранных партий, никак не принимает в расчет то число партий, которое еще необходимо выиграть каждому из игроков. Кардано ошибочно предлагал делить ставку в отношении сумм членов двух арифметических прогрессий с разностями, равными единице, которые начинаются с единицы и продолжаются до числа недостающих партий до выигрыша, т. е. в отношении $(1 + 2 + 3 + \ldots + (k - n)) : (1 + 2 + 3 + \ldots + (k - m))$, где k — количество партий, до которого должна продолжаться игра по условию, а m и n — количество партий, выигранных партнерами.

252. Пачоли ошибочно делил ставку в отношении 4 : 3 : 2.

253—255. Тарталья ошибочно считал, что отклонение от половины ставки должно быть пропорционально разности выигранных партий. Как видно, Тарталья решал задачи на разделение ставки арифметическим методом, не опираясь на вероятностные рассуждения.

256. Певероне ошибочно считает, что ставка должна быть разделена в отношении 1 : 6, что близко к правильному ответу 1 : 7. Он дал правильное решение в двух случаях, а именно когда игроки A и B выиграли по 9 партий и когда игрок A выиграл 8 партий, а игрок B — 9 партий.

257. Свое решение задачи Паскаль наиболее полно изложил в письме к Ферма от 29 июля 1654 г.: «Вот примерно, что я делаю для определения стоимости каждой партии, когда два игрока играют, например, на три партии и каждым вложено в игру по 32 пистоля.

Предположим, что один выиграл две партии, а другой — одну. Они играют еще одну партию, если ее выигрывает первый, то он получает всю сумму в 64 пистоля; если же эту партию выигрывает второй, то каждый игрок будет иметь 2 выигранные партии, и, следовательно, если они намерены произвести раздел, каждый должен получить обратно свой вклад в 32 пистоля.

Примите же во внимание, монсеньер, что если первый выиграет, то ему причитается 64; если он проиграет, то ему причитается 32. Если же игроки не намерены рисковать... и хотят произвести раздел, то первый должен сказать: «Я имею 32 пистоля верных, ибо в случае проигрыша я их также получил бы, но остальные 32 пистоля могут быть получены либо мной, либо Вами. Случайности равны. Разделим же эти 32 пистоля пополам, и дайте мне, кроме того, бесспорную сумму в 32 пистоля». Как видно из рассуждений Паскаля, первый игрок должен получить 48 пистолей, а второй — 16.

258. Ответы, предложенные Паскалем, таковы: первый игрок должен получить 56 пистолей, а второй 8 пистолей. Рассуждения при решении подобны тем, которые были проведены при решении предыдущей задачи: если бы первый игрок выиграл еще одну партию, то ему причиталось бы 64 пистоля, если бы проиграл — 48 пистолей, а остаток 16 делится поровну.

259. Пусть игроки сыграют еще одну партию. Если ее выигрывает первый, то он будет иметь, как и в предыдущем случае, 56 пистолей. Если он ее проигрывает, то у обоих окажется по одной выигранной партии и первому следует получить 32 пистоля. Первый игрок может сказать: «Если вы не хотите играть эту партию, дайте мне мой бесспорный выигрыш в 32 пистоля, а остаток от 56 разделим поровну... т. е. возьмем каждый по 12, что с 32 составит 44». Значит, первый игрок должен получить 44 пистоля, а второй — 20.

Для случая, когда первый игрок выиграл одну партию, а второй — ни одной, Паскаль приводит формулу

$$W = A + A \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n},$$

где A — ставка каждого игрока, а W — ожидание выигрыша первого игрока.

Как видно, во всех случаях Паскаль делит ставку пропорционально вероятности выигрыша при продолжении игры. Оригинальный метод Паскаля трудно применить к более сложным случаям.

260. Письмо Ферма, в котором он излагает свой метод решения, не сохранилось, но его можно восстановить из ответного письма Паскаля от 24 августа 1654 г. Рассуждение Ферма сводится к следующему. Игра может быть продолжена максимум еще четыре партии. Для перебора всех возможных случаев Ферма составляет таблицу, где выигрыши партий игроками A и B обозначены соответственно буквами a и b:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a	a	a	a	b	a	a	a	b	b	b	b	b	b	a	b
a	a	a	b	a	a	b	b	a	a	b	b	b	a	b	b
a	a	b	a	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	b	b
a	b	a	a	a	b	b	a	b	a	a	a	b	b	b	b

Из 16 возможных исходов первые 11 благоприятны для выигрыша игроком A всей встречи, а остальные пять исходов благоприятны для игрока B. Следовательно, $\frac{11}{16}$ ставки должен получить игрок A, а игрок $B - \frac{5}{16}$. Как видно, Ферма предлагает разделить ставку пропорционально вероятностям выигрыша всей встречи.

Паскаль решает эту задачу на основе изучения свойств арифметического треугольника, приведенного в его «Трактате об арифметическом треугольнике», опубликованном посмертно в Париже в 1665 г. Он складывает количество партий, недостающих игрокам $A(2)$ и $B(3)$, и берет ту строку треугольника (рис. 49), в которой количество членов равно найденной сумме, т. е. пятую. Тогда доля игрока A будет равна сумме членов найденной строки, начиная от единицы, причем количество слагаемых равно числу партий, недостающих игроку $B(3)$, а доля игрока B равна такой же сумме, но с количеством слагаемых, равным числу партий, недостающих игроку $A(2)$. Выписываем строку, в которой находится пять чисел. Это будут 1, 4, 6, 4, 1. Следовательно, ставку нужно разделить в отношении 11 : 5. При таком решении ставка делится пропорционально вероятностям выиграть всю ставку для игроков A и B.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

Рис. 49

Таким образом, правило Паскаля состоит в следующем: пусть игроку A до выигрыша всей игры не хватает m партий, а игроку $B - n$ партий, тогда ставка должна делиться между игроками в отношении

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_{m+n-1}^{i} : \sum_{i=0}^{m-1} C_{m+n-1}^{i}.$$

261. Перебор всех возможных случаев можно представить таблицей:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*b*	*c*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*b*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*c*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*b*	*c*	*c*	*c*	*b*	*c*
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*a*	*b*	*a*	*c*	*b*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*c*
a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*

При рассмотрении такой таблицы Паскаль допустил неточность в рассуждениях, считая, что из 27 возможных исходов бесспорно благоприятствуют игроку A лишь 13, а исходы 5, 11, 19-го столбцов благоприятствуют сразу и игроку A, и игроку B (аналогичные исходы 9, 15, 24-го столбцов благоприятствуют игроку A и игроку C). Поэтому доли игроков в этих случаях следует брать с половинным весом. В результате Паскаль ошибочно предлагал делить ставку в отношении $16 : \frac{11}{2} : \frac{11}{2}$ вместо $17 : 5 : 5$.

262. Ставку нужно разделить пропорционально отношению вероятностей выигрыша для первого и второго игроков $p_1 : p_2$, где

$$p_1 = \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2} C_m^1 + \frac{1}{2^2} C_{m+1}^2 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} C_{m+n-2}^{n-1}\right)$$

и

$$p_2 = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{2^2} C_{n+1}^2 + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} C_{n+m-2}^{m-1}\right).$$

Поясним вычисление вероятности p_1 (см. приложение V). При продолжении игры первый игрок может обеспечить себе выигрыш лишь в следующих случаях:

1) выигрывает m партий подряд;

2) из m партий проиграет одну и выиграет $(m + 1)$-ю партию;

3) из $m + 1$ партий проиграет две и выиграет $(m + 2)$-ю партию;

....

n) из $m + n - 2$ партий проиграет $n - 1$ и выиграет $(m + n - 1)$-ю партию.

Тогда

$$p_1 = \frac{1}{2^m} + C_m^1 \frac{1}{2^{m+1}} + C_{m+1}^2 \frac{1}{2^{m+2}} + \ldots + C_{m+n-2}^{m-1} \frac{1}{2^{m+n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2} C_m^1 + \frac{1}{2^2} C_{m+1}^2 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} C_{m+n-2}^{m-1}\right).$$

Аналогично находится вероятность p_2.

263. Гюйгенс предлагает в своем решении учитывать только количество недостающих партий и разделить сумму ставки (a) в отношении $\frac{3a}{4} : \frac{a}{4}$.

264. $\frac{7a}{8} : \frac{a}{8}$.

265. $\frac{15a}{16} : \frac{a}{16}$.

266. $\frac{11a}{16} : \frac{5a}{16}$.

267. $\frac{13a}{16} : \frac{3a}{16}$.

268. $\frac{4a}{9} : \frac{4a}{9} : \frac{a}{9}$.

269. Ричард де Форниваль подсчитал общее число всех возможных исходов при бросании трех игральных костей как $6 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 216$, а не как $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

270. Все возможные различные суммы, получающиеся при одновременном бросании трех игральных костей, без учета перестановок, можно представить в виде

$3 = 1 + 1 + 1$

$4 = 1 + 1 + 2$

$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$

$6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$

$7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3$

$8 = 1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$

$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$

$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 4 + 3$

$11 = 1 + 4 + 6 = 1 + 5 + 5 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 = 3 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4$

$12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 2 + 5 + 5 = 3 + 3 = 6 = 3 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4$

$13 = 1 + 6 + 6 = 2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 6 = 3 + 5 + 5 = 4 + 4 + 5$

$14 = 2 + 6 + 6 = 3 + 5 + 6 = 4 + 4 + 6 = 4 + 5 + 5$

$15 = 3 + 6 + 6 = 4 + 5 + 6 = 5 + 5 + 5$

$16 = 4 + 6 + 6 = 5 + 5 + 6$

17 = 5 + 6 + 6

18 = 6 + 6 + 6

С учетом перестановок получим следующую таблицу:

Сумма очков	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Число способов	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

271. Все возможные различные суммы числа очков на верхних гранях трех игральных костей без учета порядка можно представить в виде следующих табличек перебора:

1 + 1 + 1					
1 + 1 + 2	1 + 2 + 2				
1 + 1 + 3	1 + 2 + 3	1 + 3 + 3			
1 + 1 + 4	1 + 2 + 4	1 + 3 + 4	1 + 4 + 4		
1 + 1 + 5	1 + 2 + 5	1 + 3 + 5	1 + 4 + 5	1 + 5 + 5	
1 + 1 + 6	1 + 2 + 6	1 + 3 + 6	1 + 4 + 6	1 + 5 + 6	1 + 6 + 6
2 + 2 + 2					
2 + 2 + 3	2 + 3 + 3				
2 + 2 + 4	2 + 3 + 4	2 + 4 + 4			
2 + 2 + 5	2 + 3 + 5	2 + 4 + 5	2 + 5 + 5		
2 + 2 + 6	2 + 3 + 6	2 + 4 + 6	2 + 5 + 6	2 + 6 + 6	
3 + 3 + 3					
3 + 3 + 4	3 + 4 + 4				
3 + 3 + 5	3 + 4 + 5	3 + 5 + 5			
3 + 3 + 6	3 + 4 + 6	3 + 5 + 6	3 + 6 + 6		
4 + 4 + 4					
4 + 4 + 5	4 + 5 + 5		5 + 5 + 5		
4 + 4 + 6	4 + 5 + 6	4 + 6 + 6	5 + 5 + 6	5 + 6 + 6	6 + 6 + 6

Отсюда видно, что число различных исходов различного числа очков без учета порядка равно 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56.

В комментариях Д'Имола допустил ошибку, не различая выпадения костей с повторениями, например сумма 4 может появиться тремя способами: 1 + 1 + 2; 1 + 2 + 1 и 2 + 1 + 1, а не одним, как он считал.

272. Преподобный Галиани был, конечно, прав, решив, что человек из Базиликаты — жулик, так как вероятности выпадения трех шестерок при каждом следующем броске быстро убывают и равны соответственно $\frac{1}{6^3}, \frac{1}{6^6}, \frac{1}{6^9}, \frac{1}{6^{12}}, \frac{1}{6^{15}}$.

273. 11.

274. 20.

275.

Сумма очков	2 или 12	3 или 11	4 или 10	5 или 9	6 или 8	7
Число способов	1	2	3	4	5	6

276.

Сумма очков	3 или 18	4 или 17	5 или 16	6 или 15	7 или 14	8 или 13	9 или 12	10 или 11
Число способов	1	3	6	10	15	21	25	27

277. 1) 126.

2)

Число костей	1	2	3	4	...	n
Число различных исходов	6	21	56	126	...	$\sum_{i=-1}^{4} C_{n+1}^{i+1}$

278. Так как при каждом бросании игральной кости имеется 6 различных возможностей, то при четырех бросаниях кости число различных равновозможных случаев будет 1296 ($6 \times 6 \times 6 \times 6$). Но среди этих 1296 случаев будет 625 ($5 \times 5 \times 5 \times 5$) таких, где шестерка не появилась ни разу, а в $1296 - 625 = 671$ случае хотя бы один раз из четырех выпадает шестерка. Следовательно, вероятность выпадения хотя бы одной шестерки при четырех бросаниях кости равна $\frac{671}{1296}$, т. е. больше $\frac{1}{2}$. Это значит, что чем больше рыцарь играл, тем больше он выигрывал. Оказываясь постоянно в проигрыше, противники рыцаря перестали играть по этим правилам с де Мерэ. Тогда он придумал новую игру (задача 279).

279. При одновременном бросании двух игральных костей вероятность выпадения двух шестерок равна $\frac{1}{36}$, а вероятность того, что не выпадут две шестерки, равна $\frac{35}{36}$. Тогда вероятность того, что при 24-кратном бросании двух костей ни разу не выпадут две шестерки, будет равна $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}509$. Следовательно, вероятность проигрыша для рыцаря была больше $\frac{1}{2}$. Это значит, что чем больше рыцарь будет играть, тем больше он будет проигрывать. Когда так и случилось, рыцарь разорился и обратился к Паскалю за разъяснениями. Паскаль успешно раскрыл математические тайны правил двух игр рыцаря де Мерэ.

280. Все возможные суммы, получающиеся при одновременном бросании двух игральных костей, можно представить в виде

$2 = 1 + 1$

$3 = 1 + 2 = 2 + 1$

$4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2$

$5 = 1 + 4 = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2$

$6 = 1 + 5 = 5 + 1 = 2 + 4 = 4 + 2 = 3 + 3$

$7 = 1 + 6 = 6 + 1 = 2 + 5 = 5 + 2 = 3 + 4 = 4 + 3$

$8 = 2 + 6 = 6 + 2 = 3 + 5 = 5 + 3 = 4 + 4$

$9 = 3 + 6 = 6 + 3 = 4 + 5 = 5 + 4$

$10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5$

$11 = 5 + 6 = 6 + 5$

$12 = 6 + 6$

В итоге получаем таблицу

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число способов	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

281. См. задачу 270.

282. С этим вопросом обратился к Гюйгенсу ландскнехт (наемный солдат). Многолетний опыт игрока показывал, что 11 очков появляется несколько чаще, чем 12 очков, хотя ландскнехт заметил одинаковую возможность представить 11 и 12 очков шестью различными способами:

$$11 = 1 + 4 + 6 = 1 + 5 + 5 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 = 3 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4;$$

$$12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 2 + 5 + 5 = 3 + 3 + 6 = 3 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4.$$

С учетом возможных перестановок он получил бы для 11 очков 27 различных случаев $(6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3)$, а для 12 очков — 25 $(6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1)$. В своем трактате «О расчете в азартных играх» Гюйгенс указал, в частности, сколькими способами при бросании двух костей можно получить ту или иную сумму очков. Для одновременного бросания трех костей Гюйгенс составил таблицу для числа очков различных возможных случаев.

283. Излагая правила перебора различных исходов при одновременном бросании четырех игральных костей, Я. Бернулли приходит к следующей таблице:

Способы получения 12 очков	Число бросков с учетом перестановок
6 + 4 + 1 + 1	12
5 + 5 + 1 + 1	6
6 + 3 + 2 + 1	24
5 + 4 + 2 + 1	24
5 + 3 + 3 + 1	12
4 + 4 + 3 + 1	12
6 + 2 + 2 + 2	4
5 + 3 + 2 + 2	12
4 + 4 + 2 + 2	6
4 + 3 + 3 + 2	12
3 + 3 + 3 + 3	1
Всего	125

Кроме этого, Я. Бернулли указывает общее правило для нахождения числа способов, которыми может быть получено m очков при одновременном бросании n игральных костей; оно равно коэффициенту x^m в разложении

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n,$$

где x — произвольный параметр. В частности, для $n = 2$ имеем

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 =$$
$$= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}.$$

Показатели параметра x в правой части тождества указывают на возможные суммы очков при одновременном бросании двух игральных костей от 2 до 12, а коэффициенты — соответственно на число способов получения этих сумм очков.

Аналогичные рассуждения для $n = 4$ приводят к следующей таблице:

Сумма очков	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Число способов	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140

Сумма очков	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Число способов	146	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1

284. $\frac{1}{6^6}$.

285. Вероятность появления не менее i ($i = 1, 2, 3$) шестерок соответственно при подбрасывании $6i$ ($i = 1, 2, 3$) костей равна

$$P_{6i}\,(i \leqslant k \leqslant 6i) = \sum_{k=i}^{6i} P_{6i}(k) = \sum_{k=i}^{6i} C_{6i}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6i-k} =$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{i-1} C_{6i}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6i-k}.$$

Результаты подсчетов дают:

1) $P_6\,(1 \leqslant k \leqslant 6) \approx 0{,}665$;

2) $P_{12}\,(2 \leqslant k \leqslant 12) \approx 0{,}619$;

3) $P_{18}\,(3 \leqslant k \leqslant 18) \approx 0{,}597$.

Как видно, предпочтительнее поставить пари на появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании 6 костей. См. также [81].

286. $5^{n-m}C_n^m$.

287. Количество исходов (без повторений) для n костей будет равно C_{n+5}^n, где $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Искомые результаты можно свести в таблицу:

Число костей n	1	2	3	4	5	6
Количество исходов (без повторений) C_{n+5}^n	6	21	56	126	252	462

288. Аналогично решению задачи 286.

289. $\frac{8}{15}$.

290. $p_i = \frac{C_5^i}{C_{90}^i}$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

В частности, получим

$p_1 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$;

$p_2 = \frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}$;

$p_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11\,748}$;

$p_4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511\,038}$;

$p_5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43\,949\,268}$.

291. 4 : 2 : 1, так как игроку A благоприятствуют случаи б, б, б; б, б, ч; б, ч, б; б, ч, ч; B — ч, б, б; ч, б, ч; C — ч, ч, б.

292. Шансы первого игрока равны $\frac{(C_{10}^1)^4}{C_{40}^4} = \frac{1000}{9139}$, а значит, шансы игроков A и B относятся как 1000 : 8139.

293. $(n - k + 1)p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$. Сравните ваш результат с формулой Я. Бернулли (см. Приложение V, 3).

294. Пусть у A и B по одному билету. Тогда вероятность выигрыша A равна 1. При $n = 2$ B может вытянуть их в порядке 1, 2 и 2, 1, но так как эти исходы равновозможны, то каждый игрок может претендовать на половину взноса. Если $n = 3$ и A тянет их в порядке 1, 2, 3, то для B найдется шесть различных способов извлечения:

$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	2	1
3	3	2	3	1	1	2

Из них четыре являются благоприятными для A и два — для B, а поэтому надежды на выигрыш относятся как 2 : 1. Для четырех билетов таблица будет иметь вид

$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
2	2	2	3	3	4	4	3	3	4	4	1	1	4	4	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3
3	3	4	4	2	2	3	4	1	1	3	4	3	1	2	2	4	1	4	2	3	3	1	1	2
4	4	3	2	4	3	2	1	4	3	1	3	4	2	1	4	2	4	1	3	2	1	3	2	1

Шансы на выигрыш у A и B относятся как 5 : 3.

Заметим, наконец, что этой задаче в настоящее время придаются различные формулировки [20].

295. $\dfrac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}^{m}}$.

296.

Секвенции	1(5)	1(4) и 1(1)	1(3) и 1(2)	1(3) и 2(1)	2(2) и 1(1)	1(2) и 3(1)	5(1)
Вероятности	$\frac{1}{511\,038}$	$\frac{85}{511\,038}$	$\frac{85}{511\,038}$	$\frac{3570}{511\,038}$	$\frac{3570}{511\,038}$	$\frac{98\,770}{511\,038}$	$\frac{404\,957}{511\,038}$

297. Д'Аламбер ошибочно считал, что возможны три несовместимых и единственно возможных случая: два орла, две решки или орел с решкой. Исходя из равновозможности этих случаев, он искомую вероятность принимал равной $\frac{2}{3}$ вместо $\frac{3}{4}$. Однако допущение Д'Аламбера о равновозможности трех названных случаев противоречит допущению равновозможности выпадения орла и выпадения решки при бросании одной монеты и допущению независимости выпадения орла на двух брошенных монетах.

298. Для трех бросаний монеты Д'Аламбер учитывал только четыре случая: 1) орел; 2) решка, орел, орел; 3) решка, решка, орел; 4) решка, решка, решка — и ошибочно получил вероятность появления орла равной $\frac{3}{4}$ вместо $\frac{7}{8}$.

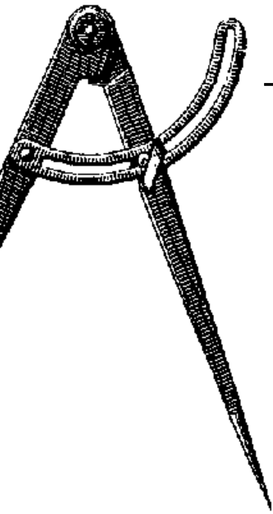
299. $\frac{1}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2^3 \cdot 3^2}{15!}$.

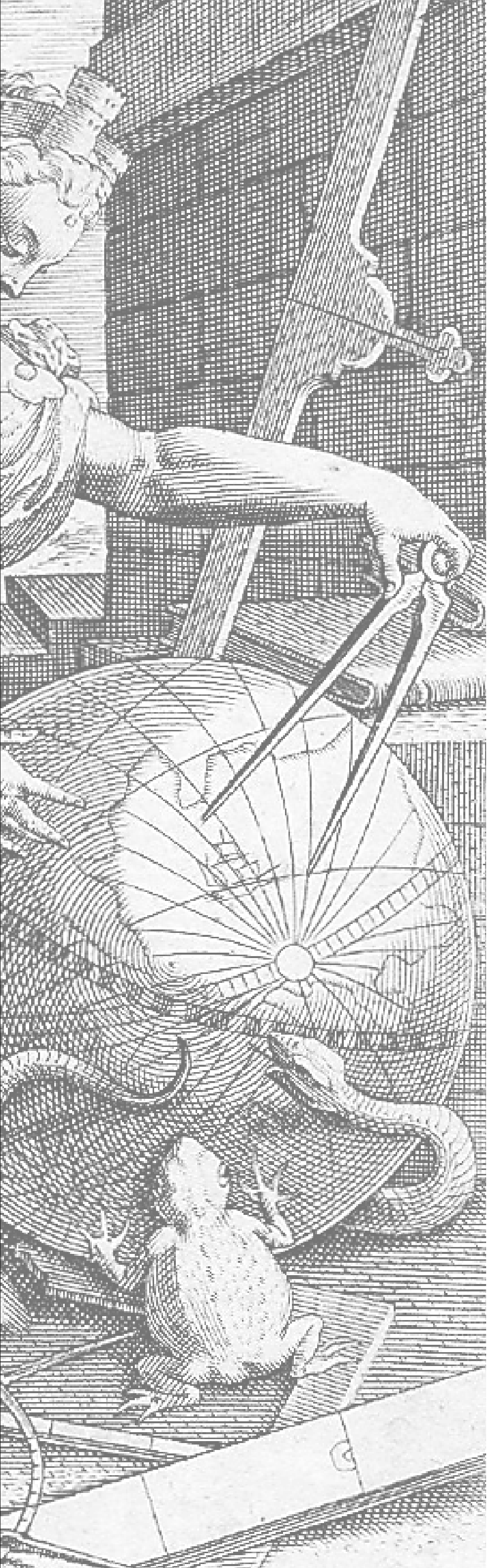
Д'Аламбер, выражавший сомнения в основах теории вероятностей, заявил, что все размещения букв равновероятны только математически, на самом же деле нет. Лаплас сделал иной вывод. Так как слово «Константинополь» имеет определенный смысл, его случайное составление маловероятно.

300. $\frac{C_a^c C_b^d}{C_{a+b}^n}$.

V

ПРИЛОЖЕНИЯ

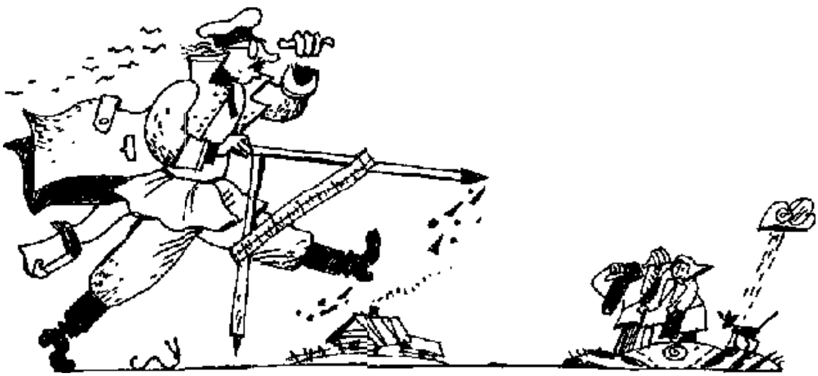




I. МЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МЕР

Без меры и лаптя не сплетешь.

Русская пословица



1. Измерение отрезков

Пусть задан отрезок AB, длину которого надо измерить. Приложим к нему шкалу сантиметровой линейки, совместив ее нулевую точку O с точкой A отрезка. Если при этом окажется, что точка B совпадает с некоторым делением шкалы, например с отметкой 5, то говорят, что длина отрезка AB равна 5 см, и пишут AB = 5 см (рис. 49, *а*). Если нет, то можно указать два деления, между которыми находится точка B, например 5 и 6 (рис. 49, *б*, *в*).

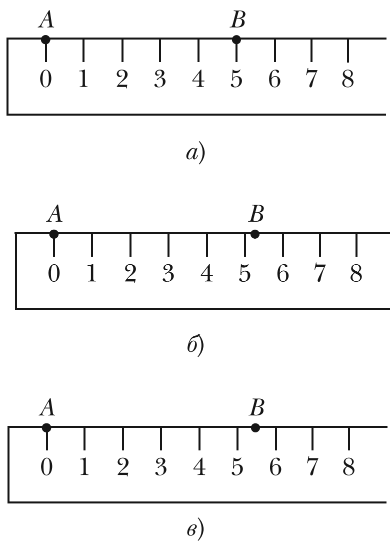


Рис. 49

Точная длина AB нам осталась неизвестной. Однако мы видим, что величины 5 см и 6 см отличаются от длины AB не более чем на 1 см. Их называют «приближениями» или «приближенными значениями длины AB с точностью до 1 см», записывают $AB \approx 5$ см, $AB \approx 6$ см и говорят, что длина AB приближенно равна 5 см или 6 см с точностью до 1 см.

Так как 5 см < AB < 6 см, то еще говорят, что 5 см и 6 см, приближают AB с точностью до 1 см соответственно с «недостатком» (см. рис. 49, *б*) и «избытком» (см. рис. 49, *в*).

На практике широко пользуются также понятием приближения с «округлением». Поясним его на данном примере.

То из делений шкалы 5 см и 6 см, которое расположено ближе к B, называется «приближением длины AB с точностью до 1 см с округлением»; если же B находится посредине между этими делениями, то приближением длины AB с точностью до 1 см с округлением принято называть большее из указанных делений, т. е. 6 см.

Например, на рис. 49, *в* $AB \approx 6$ см с округлением, а на рис. 49, *б* $AB \approx 5$ см с округлением.

2. Величина

Такие понятия, как длина, площадь, объем, масса, называются *величинами*. Величина есть результат измерения, она определяется числом, выраженным в определенных единицах. Для обозначения величины пишут это число, а рядом — название единицы.

Например: 5 см, 10 кг, 12 км, 7 т, 9 мин.

Одна и та же величина в разных единицах выражается разными числами.

Например: 5 см = 50 мм, 1 ч = 60 мин, 2 кг = 2000 г.

3. Метрические единицы длины

В нашей стране и в большинстве стран мира за основную единицу длины принимается метр.

В городе Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов в специальном помещении, где поддерживается постоянная температура 0 °C, на специальных подставках лежит стержень, сделанный из весьма твердого сплава платины и иридия. На нем имеются две отметки. Расстояние между ними по международному соглашению принято считать основной единицей измерения длин и называть *метром* (м). Этот стержень и считается эталоном метра.

Во многих странах мира в соответствующих помещениях находятся тщательно изготовленные копии указанного эталона. У нас в стране эта копия хранится в Институте метрологии им. Д. И. Менделеева в Санкт-Петербурге.

Метр состоит из 10 дециметров (дм), т. е. 1 дециметр есть одна десятая часть метра.

Дециметр состоит из 10 сантиметров (см), т. е. 1 сантиметр есть одна десятая часть дециметра, или одна сотая часть метра.

Сантиметр состоит из 10 миллиметров (мм), т. е. 1 миллиметр есть одна десятая часть сантиметра, одна сотая часть дециметра и одна тысячная часть метра.

Записывают:

1 м = 10 дм; 1 дм = 10 см; 1 см = 10 мм;

1 м = 100 см = 1000 мм.

Примеры:

1) 2358 мм = 2 м 3 дм 5 см 8 мм = 2 м 35 см 8 мм;

2) 15 м 48 см 4 мм = 15 м 4 дм 8 см 4 мм = 15 484 мм.

Для измерения больших длин введена единица длины 1 километр (км), равная 1000 метрам. Пишут: 1 км = 1000 м.

Очень большие расстояния — астрономические — выражают в виде степеней 10 или в виде произведения некоторого числа, большего 1, но меньшего 10, на определенную степень 10.

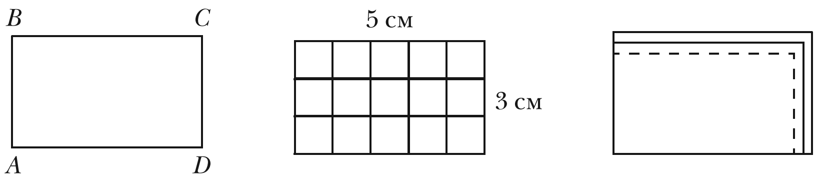
Например: 20 000 000 000 000 000 000 000 м = $2 \cdot 10^{22}$ м = $2 \cdot 10^{19}$ км, так как 1 км = 10^3 м.

Очень малые длины измеряют микронами и микромикронами: 1 мм = 1000 микронов, 1 микрон = 1000 микромикронов.

В науке приходится иметь дело с еще меньшими расстояниями. Чтобы выразить их, указывают, какую часть микрона они составляют.

4. Измерение площади прямоугольника

На рис. 50, *а* изображен прямоугольник *ABCD*. Его площадь может быть измерена при помощи единичных квадратов, т. е. квадратов, стороны которых имеют длину, равную единице. Про



а) *б*) *в*)

Рис. 50

единичный квадрат говорят, что он имеет площадь, равную одной *квадратной единице*.

Например, квадрат со стороной 1 см имеет площадь 1 кв. см, или 1 см^2 (читается: «один квадратный сантиметр»).

Если прямоугольник можно разрезать на s единичных квадратов, то говорят, что он имеет площадь, равную s квадратным единицам.

Например, на рис. 50, *б* изображен прямоугольник со сторонами $a = 3$ см и $b = 5$ см. Его можно разрезать на $3 \cdot 5 = 15$ единичных квадратов со стороной 1 см. Следовательно, его площадь $S = 3$ см $\cdot$ 5 см = 15 см^2. Пишут еще: $S = 3 \cdot 5 = 15$ см^2 и читают: «15 квадратных сантиметров».

На рис. 50, *в* разными линиями обозначены точная площадь, площадь с избытком, площадь с недостатком.

Площадь прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон:

$S = a \cdot b$ квадратных единиц;

длины a и b сторон выражены натуральными числами в одной единице измерения.

Площади различных фигур измеряют в квадратных единицах.

Квадраты, стороны которых имеют следующие единицы длины (их называют еще *линейными единицами*): 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км — образуют следующие единицы площади:

1 мм^2 — квадратный миллиметр,

1 см^2 — квадратный сантиметр,

1 дм^2 — квадратный дециметр,

1 м^2 — квадратный метр,

1 км^2 — квадратный километр.

Так как 1 см = 10 мм, то 1 см^2 = 10 мм $\cdot$ 10 мм = 100 мм^2.

Аналогично

1 дм^2 = 10 см • 10 см = 100 см^2,

1 м^2 = 10 дм • 10 дм = 100 дм^2,

1 км^2 = 1000 м • 1000 м = 1 000 000 м^2.

Используя степень числа 10, квадратный километр можно записать так: 1 км^2 = 10^6 м^2.

Для измерения небольших земельных участков оказалось удобным ввести специальную квадратную единицу — 1 ар; пишут: 1 а. Это площадь квадрата со стороной 10 м. Так как 10 м • 10 м = = 100 м^2, то эту единицу площади часто называют соткой. Для измерения более крупных земельных участков ввели еще одну квадратную единицу — 1 гектар; пишут: 1 га. Это площадь квадрата со стороной 100 м, т. е.

1 га = 100 м • 100 м = 10 000 м^2,

1 га = 100 а.

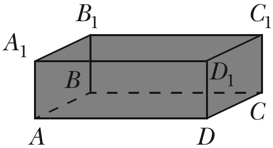
На практике, измеряя площади, мы чаще всего пользуемся приближенными значениями величин.

Например, пусть требуется найти площадь прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 50, *а*). Допустим, что измерив его стороны AB и AD, мы получили $AB \approx 22$ см, $AD \approx 34$ см с недостатком (с точностью до 1 см). Так как длины сторон измерены с недостатком, значит, площадь прямоугольника $ABCD$ больше, чем $22 \cdot 34$ = 748 см^2, т. е. $S > 748$ см^2. Если мы возьмем длины сторон с избытком $AB \approx 23$ см, $AD \approx \approx 35$ см, то площадь S прямоугольника $ABCD$ будет меньше, чем $23 \cdot 35 = 805$ см^2, т. е. $S < 805$ см^2. Получается, что площадь S прямоугольника $ABCD$ больше 748 см^2 и меньше 805 см^2. Это можно записать так: 748 см^2 < S < 805 см^2.

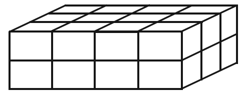
Точность измерения площади в нашем случае: 805 – 748 = = 57 см^2.

5. *Измерение объема прямоугольного параллелепипеда*

На рис. 51, *а* изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его объем может быть измерен при помощи единичных кубов, т. е. кубов, стороны которых имеют длину, равную единице. За единицу объема принимается объем единичного ку-



а)



б)

Рис. 51

ба. Если прямоугольный параллелепипед можно разрезать на k единичных кубов, то говорят, что его объем равен k кубическим единицам.

На рис. 51, *б* изображен прямоугольный параллелепипед, у которого длины сторон равны соответственно 3, 4, 2 линейным единицам. Прямоугольный параллелепипед можно разрезать на 2 слоя, в каждом из которых $3 \cdot 4 = 12$ единичных кубов. Всего прямоугольный параллелепипед содержит $(3 \cdot 4) \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24$ единичных куба.

Если длины a, b и c сторон прямоугольного параллелепипеда выражены натуральными числами в одной единице измерения, то вычисление объема сводится к нахождению их произведения:

$V = a \cdot b \cdot c$ кубических единиц.

Объем куба со стороной 1 см называется *кубическим сантиметром* и обозначается так: 1 см^3 (читается: «один кубический сантиметр»).

Аналогично определяются другие кубические единицы:

1 см^3 = 10 мм · 10 мм · 10 мм = 1000 мм^3,

1 дм^3 = 10 см · 10 см · 10 см = 1000 см^3,

1 м^3 = 10 дм · 10 дм · 10 дм = 1000 дм^3,

или

1 м^3 = 100 см · 100 см · 100 см = 1 000 000 см^3,

1 км^3 = 1000 м · 1000 м · 1000 м = 1 000 000 000 м^3 = 10^9 м^3.

1 дм^3 называют еще *литром* (л): 1 л = 1 дм^3.

6. Единицы массы

Основная единица массы — *грамм* (в обиходе массу называют весом и говорят, например, «вес 1 грамм» вместо «масса 1 грамм»).

По предложению Парижской академии наук за 1 грамм принята масса 1 $см^3$ воды при температуре 4 °С. Тысячу граммов называют *килограммом* (кг):

1 кг = 1000 г;

таким образом, масса 1 $дм^3$ воды (1000 $см^3$) составляет 1 кг.

Тысяча килограммов называется *тонной* (т):

1 т = 1000 кг.

Масса 1 $м^3$ воды составляет 1 т.

На практике часто используют еще одну единицу массы — *центнер* (ц):

1 ц = 100 кг.

Парижская академия наук организовала взвешивание 1 $дм^3$ воды при 4 °С. Была изготовлена из металла гиря, имеющая массу, весьма точно равную массе 1 $дм^3$ воды. Эта гиря хранится вместе с эталоном метра в городе Севре. По ней, как по эталону, изготовлены точные ее копии, которые хранятся во всех странах мира. В нашей стране эта копия хранится в Институте метрологии имени Д. И. Менделеева в Санкт-Петербурге.

7. Единицы времени

Любые процессы и движения происходят во времени. Время одного движения можно измерять при помощи времени другого движения, например вращения Земли вокруг ее оси.

Время, в течение которого Земля совершает полный оборот вокруг своей оси, называется *сутками*. Сутки — единица времени. Одни сутки содержат 24 часа:

1 сутки = 24 часам.

Один час равен 60 *минутам*, а минута равна 60 *секундам*:

1 ч = 60 мин,

1 мин = 60 с,

1 ч = 3600 с.

В науке основной единицей времени считается секунда. Даже очень большие промежутки времени выражаются в секундах с помощью степени числа 10. Приходится иметь дело и с долями секунды. Так, в современных спортивных соревнованиях различные достижения (например, в беге, плавании) измеряются в десятых и даже в сотых долях секунды.

В обыденной жизни, в том числе в хозяйственной деятельности предприятий и учреждений, пользуются такими единицами времени как *год*, *месяц*, *неделя* и еще *квартал* и *декада*.

Год есть время обращения Земли вокруг Солнца с точностью до 5–6 мин; 1 год – 365 суток и 6 часов.

По действующему в большинстве стран мира календарю считается, что если номер года делится на 4 (например, 2004), то этот год содержит 366 суток. Такие годы называются *високосными*. А не високосные (или простые) годы содержат по 365 суток. Указанная выше прибавка в 6 часов за четыре года составляет 24 часа, т. е. целые сутки, которые и приписывают к високосному году.

Год делится на 12 месяцев.

Так как 365 и 366 не делятся на 12, то пришлось распределить дни года между месяцами неравномерно: по 31 дню – январь, март, май, июль, август, октябрь, декабрь; по 30 дней – апрель, июнь, сентябрь, ноябрь; февраль в зависимости от года содержит 28 или 29 дней (високосный 29 дней, не високосный – 28).

Квартал содержит 3 месяца, декада – 10 дней, неделя – 7 суток.

8. Историческая справка

С незапамятных времен человеку приходилось измерять расстояния в связи с изготовлением простейших орудий труда, со строительством жилищ и добыванием пищи. Подобно тому как при счете человек пользовался вначале пальцами рук и ног, так и при измерении расстояний он прибегал к рукам и ногам. Вот почему в прошлом мерами длины служили (да иногда и теперь еще служат) шаг, ладонь – ширина кисти руки, локоть – расстояние от локтя до конца среднего пальца и т. п.

Название мер у разных народов свидетельствует об их происхождении от различных частей человеческого тела. Например, слово «дюйм» (английская, а также старая русская мера длины примерно равная 2,5 см) означает на голландском языке «большой палец». Слово «фут» (старая мера длины примерно равная 30,5 см) означает в английском языке «нога». Эта мера длины возникла как средняя длина ступни человека. Отсюда и известный афоризм: «Человек – мера всех вещей».

9. Русские меры

Древними русскими мерами длины, употреблявшимися уже в XI–XII вв., были: *пядь*, *локоть*, *сажень*. *Малая пядь* равнялась расстоянию между концами вытянутых пальцев, большого и указательного (примерно 19 см). *Большая пядь* — расстояние между раздвинутыми большим пальцем и мизинцем (примерно 23 см). *Сажень* — расстояние от ступни до конца среднего пальца вытянутой руки. Различали *простую* (примерно 152 см, или 4 локтя), *маховую* (примерно 176 см) и *косую* (примерно 213 см) сажени.

С развитием производства и торговли люди убедились в том, что не всегда удобно измерять расстояние шагами или прикладыванием локтя. Кроме того, такое измерение уже не удовлетворяло возросшим требованиям точности. В самом деле, длина локтя или шага у разных людей различна, а мера длины должна быть постоянной. Постоянные образцы мер стали изготовлять из деревянных линеек и металлических стержней.

Старой русской мерой длины был *аршин* (от персидского слова «арш» — локоть) примерно 71 см. Аршин делится на 16 *вершков*. Когда говорили о росте человека, то указывали лишь, на сколько вершков он превышает 2 аршина. Поэтому слова «человек 12 вершков роста» означали, что его рост равен 2 аршинам 12 вершкам, т. е. 196 см. 3 аршина составляли сажень, 500 саженей — *версту*, 7 верст — *милю*. Таким образом, при раздроблении и превращении приходилось умножать (соответственно, делить) на разные числа: 16, 3, 500, 7. Между тем практика измерений и вычислений показала, что проще и удобнее пользоваться такими мерами, у которых отношение двух ближайших единиц длины было бы постоянным и равнялось бы именно 10 — основанию нумерации.

Метрическая система мер и отвечает этим требованиям. Русские меры длины были уточнены в XVIII в. указом Петра I:

1 *миля* = 7 верстам ≈ 7,469 км,

1 *верста* = 500 саженей ≈ 1,0668 км,

1 *сажень* = 3 аршинам = 7 футам ≈ 2,1336 м,

1 *аршин* = 16 вершкам ≈ 0,7112 м,

1 *фут* = 12 дюймам ≈ 30,48 см,

1 *дюйм* = 10 линиям ≈ 2,54 см,

1 *линия* = 10 точкам ≈ 2,54 мм.

Для измерения площадей применялись квадратные сажень, аршин, фут, дюйм, вершок. Основной земельной мерой, начиная с XVI в., служила *десятина*, равная 2400 кв. саженей ≈ ≈ 1,1 га.

Объемы жидких тел (масло, мед, молоко) и сыпучих тел (зерно, мука) люди с древних времен измеряли особыми сосудами. На Руси мерой зерна была *кадь*, вмещавшая 14 пудов ржи (1 пуд ≈ 16,38 кг). В XVII в. основной мерой становится *четверть*, вмещавшая около 6 пудов ржи. В первой половине XIX в. была установлена следующая система сыпучих мер:

1 *четверть* = 8 четверикам ≈ 209,91 л,

1 *четверик* = 8 гарнцам ≈ 26,239 л (четверик еще называют мерой),

1 *гарнец* = 200,15 куб. дюймам ≈ 3,228 л.

Тогда же была установлена система мер жидкости:

1 *бочка* = 40 ведрам ≈ 491,96 л,

1 *ведро* = 10 штофам ≈ 12,299 л,

1 *штоф* = 2 бутылкам ≈ 1,2299 л,

1 *бутыль* = 5 соткам (чаркам) ≈ 0,615 л,

1 *сотка* (чарка) = 2 *шкаликам* ≈ 0,123 л.

Система русских мер веса, общепринятая с XVIII в., была следующая:

1 *ласт* = 72 пудам ≈ 1,179 т,

1 *берковец* = 10 пудам ≈ 1,638 ц,

1 *пуд* = 40 фунтам ≈ 16,38 кг,

1 *фунт* = 32 лотам ≈ 409,512 г,

1 *лот* = 3 золотникам ≈ 12,797 г,

1 *золотник* = 96 *долям* ≈ 4,266 г.

Древнейшей русской весовой единицей является *гривна* — слиток серебра, вес которого был приблизительно равен позднейшему фунту. В Древней Руси гривна служила одновременно и денежной единицей. В XIV в. гривну стали рубить пополам и новый слиток в половину денежной гривны, названный *рублем*, стал в XV в. основной денежной единицей. Происхождение слова «гривна» точно не установлено. Слово «деньга», встречающееся в летописи XIV в., происходит от индийского названия монеты «танка» (у греков — «денака», у татар — «тенга»). В XV в. рубль равнялся 200 »деньгам», «алтын» (по-татарски «шесть») —

6 деньгам. В XVI в. были выпущены монеты с рисунком всадника с копьем в руках, получившие название копейных денег. Согласно летописи, отсюда происходит слово *«копейка»* — сотая доля рубля. Однако этот термин встречается и в XV в. для обозначения татарской монеты копейки. При Петре I были впервые выпущены серебряные гривенники (10 копеек), полтинники (50 копеек).

10. Создание метрической системы мер

Метрическая система мер родилась во Франции. Одну десятимиллионную часть четверти земного меридиана во Франции приняли за основную меру длины и назвали *метром* (от греческого слова μετρον («метрон»), означающего «мера»). На основании измерений меридиана, сделанных французскими учеными, был изготовлен впоследствии платиново-иридиевый стержень, ставший эталоном метра. Число 10 легло в основу подразделений метра. Вот почему метрическая система мер оказалась тесно связанной с десятичными дробями.

Метрическая система мер введена в большинстве стран мира, однако не всюду. В частности, в Великобритании и США господствует старая английская система мер:

1 *английская миля* = 1760 ярдам ≈ 1,609 км,

1 *ярд* = 3 футам ≈ 0,9144 м,

1 *фут* = 12 дюймам ≈ 30,479 см,

1 *дюйм* = 12 линиям ≈ 2,54 см.

Меры жидких тел в указанных странах следующие:

1 *квартер* = 8 бушелям ≈ 290,8 л,

1 *бушель* = 8 галлонам ≈ 36, 35 л,

1 *галлон* = 4 квартам ≈ 4,55 л,

1 *кварта* = 2 пинтам ≈ 1,14 л,

1 *пинта* = 0,57 л.

Основная мера веса — *английский фунт* = 453,6 г;

английская унция = 1/16 фунта ≈ 28,35 г.

Эта система мер является крайне сложной.

В заключение приведем сравнение метрических мер с прежними русскими (приближение до 0,001):

1 м = 0,469 саж. = 3,281 фута = 1,406 арш. = 22,498 вершков,
1 см = 0,394 дюйма,
1 км = 0, 937 версты,
1 кв. м = 10,764 кв. фута,
1 куб. м = 0,103 куб. саж. = 2,78 куб. арш. = 35,317 куб. фута,
1 га = 0,915 десятины = 2196,797 кв. саж.,
1 л = 0,081 ведра = 0,038 четверика,
1 г = 0,234 золотника,
1 кг = 2,442 фунта,
1 т = 61,05 пуда.

II. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Изобретать самому — прекрасно, но то, что другими найдено, знать и ценить — меньше ли, чем создавать?

И. В. Гёте

Первые описания получения бесконечных цепных дробей дали итальянские математики Р. Бомбелли (ок. 1526—1573) и П. А. Катальди (1548—1626) и немецкий математик Л. Швентер (1585—1636). Но широкое применение цепные дроби получили, начиная лишь с работ голландского механика, физика и математика Х. Гюйгенса. Подробнее о цепных дробях см. [82].

Определение 1. *Конечной цепной* (или непрерывной) *дробью* называется дробь вида

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}},$$

где q_1 — целое неотрицательное число, а $q_2, q_3, \ldots, q_n$ — целые положительные числа.

Цепная дробь обозначается: $[q_1; q_2, q_3, \ldots, q_n]$. Числа q_1, q_2, $q_3, \ldots, q_n$ называются *элементами* (или неполными частными) цепной дроби. Всякую конечную цепную дробь можно обратить в рациональную дробь.

Пример 1.

$$[3; 1, 4, 2] = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{9}} = 3 + \frac{9}{11} = \frac{42}{11}.$$

Всякую рациональную дробь можно обратить в цепную. Пусть, например, дана рациональная дробь $\frac{a}{b}$, причем $b > 0$. Применив к a и b алгоритм Евклида для определения их общего наибольшего делителя, получим конечную систему равенств:

$$a = bq_1 + r_2,$$
$$b = r_2q_2 + r_3,$$
$$r_2 = r_3q_3 + r_4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n,$$
$$r_{n-1} = r_nq_n,$$

где $0 < r_n < \dots < r_3 < r_2 < b$.

Эта система равенств равносильна следующей системе:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_2}{b} = q_1 + \frac{1}{\dfrac{b}{r_2}},$$

$$\frac{b}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\dfrac{r_2}{r_3}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{1}{\dfrac{r_{n-1}}{r_n}},$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n,$$

из которой последовательной заменой каждой из дробей

$$\frac{b}{r_2}, \frac{r_2}{r_3}, \dots, \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}, \frac{r_{n-1}}{r_n}$$

ее соответствующим выражением из следующей строки получается представление дроби $\frac{a}{b}$ в виде

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}.$$

П р и м е р 2. Рациональное число $\frac{43}{19}$ обратить в цепную дробь.

Р е ш е н и е. Применим алгоритм Евклида к числам 43 и 19. Имеем

$$
\begin{array}{rrrrr}
&&&-\,43&\vert\,19\\
&&&38&\vert\,2\\
&&-\,19&\vert\,5&\\
&&15&\vert\,3&\\
&-\,5&\vert\,4&&\\
&4&\vert\,1&&\\
-\,4&\vert\,1&&&\\
4&\vert\,4&&&\\
0.&&&&
\end{array}
$$

Поэтому $\frac{43}{19} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}$.

О п р е д е л е н и е 2. Дроби $\frac{P_1}{Q_1} = q_1$, $\frac{P_2}{Q_2} = q_1 + \frac{1}{q_2}$,

$$\frac{P_3}{Q_3} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

называются *подходящими дробями.*

П р и м е р 3. Для рационального числа $\frac{43}{19}$ подходящими дробями являются

$$\frac{2}{1},\ 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3},\ 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}} = \frac{9}{4},\ 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{43}{19}.$$

Найдем закон образования подходящих дробей в общем виде. Для удобства положим $P_0 = 1$, $Q_0 = 0$. Заметим, что $\frac{P_k}{Q_k}$ $(k > 1)$ получается из $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ заменой в буквенном выражении для $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ числа q_{k-1} на $q_{k-1} + \frac{1}{q_k}$. Имеем

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1};$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1 + \frac{1}{q_2}}{1} = \frac{q_2 q_1 + 1}{q_2 \cdot 1 + 0} = \frac{q_2 P_1 + P_0}{q_2 Q_1 + Q_0};$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right)P_1 + P_0}{\left(q_2 + \frac{1}{q_3}\right)Q_1 + Q_0} = \frac{q_3(q_2 P_1 + P_0) + P_1}{q_3(q_2 Q_1 + Q_0) + Q_1} = \frac{q_3 P_2 + P_1}{q_3 Q_2 + Q_1}.$$

Допустим, что выполняется равенство

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}. \tag{*}$$

Докажем, что в таком случае и

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{q_{k+1} P_k + P_{k-1}}{q_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}.$$

Равенство (*) дает

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right)P_{k-1} + P_{k-2}}{\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right)Q_{k-1} + Q_{k-2}} = \frac{q_{k+1}(q_k P_{k-1} + P_{k-2}) + P_{k-1}}{q_{k+1}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) + Q_{k-1}} =$$

$$= \frac{q_{k+1} P_k + P_{k-1}}{q_{k+1} Q_k + Q_{k-1}}.$$

Таким образом, числители и знаменатели подходящих дробей можно вычислять по формулам ($k \geqslant 2$):

$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}$,

$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$.

Эти вычисления удобно производить по следующей схеме:

q	—	q_1	q_2	...	q_{k-2}	q_{k-1}	q_k	...	q_{n-1}	q_n
P	1	q_1	P_2	...	P_{k-2}	P_{k-1}	P_k	...	P_{n-1}	a
Q	0	1	Q_2	...	Q_{k-2}	Q_{k-1}	Q_k	...	Q_{n-1}	b

П р и м е р 4. Найти подходящие дроби к рациональному числу $\frac{100}{63}$.

Р е ш е н и е. Разложим рациональное число $\frac{100}{63}$ в цепную дробь. Имеем:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 &&&&&&& -100 \mid 63 \\
 &&&&&&& 63 \mid 1 \\
 &&&&&& -63 \mid 37 & \\
 &&&&&& 37 \mid 1 & \\
 &&&&& -37 \mid 26 && \\
 &&&&& 26 \mid 1 && \\
 &&&& -26 \mid 11 &&& \\
 &&&& 22 \mid 2 &&& \\
 &&& -11 \mid 4 &&&& \\
 &&& 8 \mid 2 &&&& \\
 && -4 \mid 3 &&&&& \\
 && 3 \mid 1 &&&&& \\
 & -3 \mid 1 &&&&&& \\
 & 3 \mid 3 &&&&&& \\
 & 0. &&&&&&
\end{array}
$$

Значит, $\frac{100}{63} = [1; 1, 1, 2, 2, 1, 3]$.

Указанная выше схема дает:

q	–	1	1	1	2	2	1	3
P	1	1	2	3	8	19	27	100
Q	0	1	1	2	5	12	17	63

Искомыми подходящими дробями будут

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{19}{12}, \frac{27}{17}, \frac{100}{63}$.

О п р е д е л е н и е 3. *Бесконечной цепной дробью* называется выражение вида

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}} \; .$$

Рассмотрим на конкретном примере разложение иррационального числа в бесконечную цепную дробь.

П р и м е р 5. Разложить в бесконечную цепную дробь иррациональное число $\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. Целая часть числа $\sqrt{3}$ есть 1, а поэтому

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{q_2}; \ q_2 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Целая часть числа $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ есть 1, а поэтому

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{q_3}; \ q_3 = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1.$$

Целая часть числа $\sqrt{3} + 1$ есть 2, а поэтому

$$\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{q_4}; \ q_4 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

т. е. $q_2 = q_4$. Следовательно, неполные частные также будут повторяться. Итак, $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]$.

III. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Наблюдение является обильным источником открытий...

Ш. Эрмит

Определение 4. Элементы числовой последовательности

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...,

в которой каждый последующий член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, называется *числами Фибоначчи.*

Таким образом, последовательность

$f_1, f_2, f_3, \ldots$

чисел Фибоначчи задается начальными значениями $f_1 = f_2 = 1$ и рекуррентным соотношением

$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$

(для каждого натурального $n > 1$). Первые 14 чисел Фибоначчи были впервые приведены в рукописи «Книга абака» (1228) Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Эти числа он получил как численность семейства кроликов за год, рождающихся от одной пары, при условии, что от каждой пары кроликов ежемесячно рождается новая пара (см. задачу № 176).

Методом математической индукции можно доказать следующие соотношения между числами Фибоначчи:

1) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

2) $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;

3) $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

4) $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$;

5) $f_{2n} = f^2_{n+1} - f^2_{n-1}$;

6) $f_{3n} = f^3_{n+1} + f^3_n - f^3_{n-1}$;

7) $f^2_n = f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1}$;

8) $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots + (-1)^{n+1}f_n = 1 + (-1)^{n+1}f_{n-1}$;

9) $f_{n+m} = f_{m-1}f_n + f_mf_{n+1}$.

Числа Фибоначчи обладают многими интересными теоретико-числовыми свойствами. Укажем лишь некоторые из них:

1) каждое третье число Фибоначчи четно;

2) каждое четвертое число делится на три;

3) два соседних числа Фибоначчи взаимно просты;

4) f_n делится на f_m тогда и только тогда, когда n делится на m;

5) произведение и частное двух любых различных, отличных от единицы, чисел Фибоначчи никогда не являются числами Фибоначчи.

Французский математик и астроном Ж. Бине (1786—1856) вывел явную формулу для общего члена f_n последовательности Фибоначчи как функцию от номера n, не требующую знания предыдущих членов:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right).$$

Эту формулу Бине можно доказать методом математической индукции.

Числа Фибоначчи связаны с числом

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

т. е. с золотым сечением (см. решение задачи 164).

Число φ представляется бесконечной цепной дробью вида

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}.$$

Поэтому наилучшими подходящими дробями к числу φ будут:

$1 = \frac{1}{1}$,

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2},$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3},$$

...

т. е. отношения соседних чисел Фибоначчи. В природе для винтообразного расположения листьев на стеблях растений часто бывают характерными количественные отношения последовательных чисел Фибоначчи: $\frac{3}{2}$ для орешника и бука, $\frac{5}{3}$ для абрикоса и дуба, $\frac{8}{5}$ для груши и тополя, $\frac{13}{8}$ для миндаля и ивы и т. д. Числа Фибоначчи тесно связаны с логарифмической спиралью. Это хорошо усматривается, например, в расположении семечек на подсолнухе или в строении чешуек ананаса и т. п. Числа Фибоначчи были использованы на завершающем этапе доказательства знаменитой десятой проблемы Гильберта. Эти числа нашли применение в современной прикладной (оптимизационной) математике. Казалось бы, какое отношение могут иметь числа Фибоначчи к старинной китайской народной игре цзяньшицзы, в которой двое играющих берут по очереди камни из двух кучек: или любое число камней из одной кучки, или одинаковое число камней из двух кучек. По условию игры выигрывает тот, кто берет последний камень. Оказывается, оптимальная стратегия этой древней игры опирается на использование чисел Фибоначчи. Как видим, числа Фибоначчи появляются самым неожиданным образом в природе, науке и искусстве.

IV. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Ни один математик не мыслит формулами.

А. Эйнштейн

Комбинаторика — раздел дискретной математики, играющий важную роль в теории чисел, теории вероятностей, математической логике, вычислительной технике, кибернетике.

Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Большой вклад в развитие комбинаторных методов внесли Г. .В. Лейбниц, Я. Бернулли и Л. Эйлер. В наше время интерес к комбинаторному анализу возродился в связи с бурным развитием вычислительной математики. Комбинаторные задачи стали успешно решаться на ЭВМ.

В комбинаторике изучают вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов). Рассмотрим три вида комбинаций: размещения, перестановки и сочетания без повторяющихся элементов.

Определение 5. *Размещениями* из n различных элементов по m элементов ($m \leqslant n$) называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по m элементов и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Например, из трех элементов a, b, c можно составить следующие размещения по два элемента: ab, ac, bc, ba, ca, cb.

Число всех размещений из n элементов по m элементов обозначается через A_n^m (от начальной буквы французского слова arrangement, что значит «размещение»), где $n = 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, \dots, n$.

Определим число A_n^m размещений из n элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ по m. Пусть $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ $(1 \leqslant i_k \leqslant n;\ k = 1, 2, \dots, m)$ — возможные размещения, содержащие m элементов. Будем эти размещения строить последовательно. Сначала определим a_{i_1} — первый элемент размещения. Из данной совокупности n элементов его можно выбрать n различными способами. После выбора первого элемента a_{i_1} для второго элемента a_{i_2} остается $n - 1$ способов выбора и т. д. Так как каждый такой выбор дает новое размещение, то все эти выборы можно свободно комбинировать между собой. Поэтому имеем

$$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

П р и м е р 6. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Р е ш е н и е. Искомое число трехполосных флагов:
$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$

О п р е д е л е н и е 6. *Перестановками* из n различных элементов называются размещения их этих n элементов по n.

Как видно, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n (от начальной буквы французского слова permutation, что значит «перестановка», «перемещение»). Следовательно, число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

П р и м е р 7. Сколькими способами можно расставить восемь ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Р е ш е н и е. Искомое число расстановки восьми ладей:
$P_8 = 8! = 40\,320.$

О п р е д е л е н и е 7. *Сочетаниями* из n различных элементов по m элементов называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по m элементов и отличаются хотя бы одним элементом.

Как видно, в сочетаниях в отличие от размещений не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из n элементов по m элементов в каждом обозначается C_n^m (от начальной буквы французского слова combinaison, что значит «сочетание»).

Рассмотрим все допустимые сочетания элементов: a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}. Делая в каждом из них $m!$ возможных перестановок их элементов, получим все размещения из n элементов по m. Таким образом,

$$C_n^m \cdot m! = A_n^m.$$

Отсюда $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{m!} = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$.

Последнюю формулу можно представить также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Символ C_n^m обладает очевидным свойством

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

которое будет верно также и при $m = 0$, если принять $C_n^0 = 1$.

Этой особенностью удобно пользоваться, когда $m > \dfrac{n}{2}$.

Числа C_n^m являются коэффициентами в формуле бинома Ньютона $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + b^n$ и поэтому часто называются биномиальными коэффициентами.

П р и м е р 8. Сколькими способами можно в игре «Спортлото» выбрать пять номеров из 36?

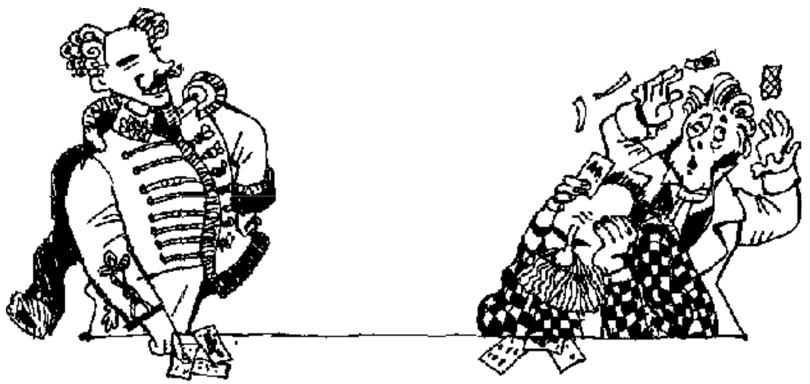
Р е ш е н и е. Искомое число способов:

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{5!31!} = \frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 376\,992.$$

V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В истории науки много примеров, когда неправильные теории приводили к полезным результатам... Мир менее прост, чем нам хотелось бы.

М. Голдстейн, И. Голдстейн



1. Первое знакомство с основными понятиями науки о случайном

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются *испытаниями*. Примерами испытаний являются: бросание монеты, извлечение шара из урны, бросание игральной кости. Результат, исход испытания называются *событием*. Событиями являются: выпадение орла или решки, взятие белого или черного шара из урны, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости. Для обозначения событий используются заглавные буквы латинского алфавита A, B, C и т. д.

Определение 8. Два события называются *совместимыми*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 9. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A – появление четырех очков. Событие B – появление четного числа очков. События A и B совместимые.

О п р е д е л е н и е 9. Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

П р и м е р 10. Испытание: однократное бросание игральной кости. Пусть события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 — соответственно выпадение одного очка, двух, трех, четырех, пяти, шести. Эти события являются несовместимыми.

О п р е д е л е н и е 10. Два события A и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

П р и м е р 11. Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение орла, событие $\overline{A}$ — выпадение решки. Эти события противоположные.

О п р е д е л е н и е 11. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

П р и м е р 12. Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

О п р е д е л е н и е 12. Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

П р и м е р 13. Событие A_6 — выпадение шести очков при однократном бросании игральной кости — случайное. Оно может и не наступить в данном испытании.

О п р е д е л е н и е 13. *Суммой событий* A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B.

П р и м е р 14. Испытание: стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу). Событие A — попадает в мишень первый стрелок, событие B — попадает в мишень второй стрелок. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$ — попадает в мишень по крайней мере один стрелок.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, ..., A_k$ называется событие $A = A_1 + A_2 + ... + A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i ($i = 1, 2, ..., k$).

Из определения 13 непосредственно следует, что $A + B = B + A$. Справедливо также и сочетательное свойство. Однако $A + A = A$ (а не $2A$, как в алгебре).

Определение 14. *Произведением событий* A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.

Аналогично произведением конечного числа событий A_1, A_2, ..., A_k называется событие $A = A_1A_2...A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В примере 14 произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двумя стрелками.

Из определения 14 непосредственно следует, что $AB = BA$.

Справедливы также сочетательный и дистрибутивный законы. Однако $AA = A$ (а не A^2).

Всякое испытание влечет за собой некоторую совокупность исходов — результатов испытания, т. е. событий.

Определение 15. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Пример 15. Полными группами событий являются: выпадение орла и выпадение решки при одном бросании монеты; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков при одном бросании игральной кости; попадание в цель и промах при одном выстреле.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий U_1, U_2, ..., U_n, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий U_i ($i = 1, 2, ..., n$) равновозможно, т. е. условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед другими возможными.

Определение 16. События U_1, U_2, ..., U_n, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть *элементарными событиями*.

Пример 16. Пусть U_i — событие, состоящее в том, что при одном бросании кости выпадает грань с цифрой i. Тогда события U_1, U_2, ..., U_6 образуют полную группу, попарно несовместимых событий. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то события U_1, U_2, ..., U_6 являются и равновозможными, т. е. элементарными.

Определение 17. Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Пример 17. Пусть при бросании игральной кости события U_2, U_4 и U_6 – появление соответственно двух, четырех и шести очков и A – событие, состоящее в появлении четного очка; события U_2, U_4 и U_6 благоприятствуют событию A.

Определение 18 (*классическое определение вероятности*). *Вероятностью* $P(A)$ события A называется отношение $\frac{m}{n}$ числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 18. Вычислим вероятность выпадения орла при одном бросании монеты. Очевидно, событие A – выпадение орла и событие B – выпадение решки образуют полную группу несовместимых и равновозможных событий для данного испытания. Событию A благоприятствует лишь одно событие – само A. Поэтому $P(A) = \frac{1}{2}$.

Пример 19. Найдем вероятность того, что при однократном бросании игральной кости выпадет четное число очков (событие A). Число элементарных событий здесь 6. Число благоприятствующих элементарных событий 3 (выпадение 2, 4 и 6). Поэтому $P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Из классического определения вероятности следует:

1) *вероятность достоверного события равна единице*;

2) *вероятность невозможного события равна нулю*;

3) *вероятность случайного события есть положительное рациональное число, заключенное между нулем и единицей, т. е.* $0 < P(A) < 1$;

4) *элементарные события являются равновероятными, т. е. обладают одной и той же вероятностью.*

2. Свойства случайных событий

Одним из основополагающих предложений теории вероятностей является теорема сложения вероятностей несовместимых случайных событий.

Т е о р е м а 1. *Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий*:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$. (1)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n; событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию B — l элементарных событий. Так как A и B — несовместимые события, то ни одно из элементарных событий $U_1, U_2, ..., U_n$ не может одновременно благоприятствовать и событию A, и событию B. Следовательно, событию $A + B$ будет благоприятствовать $k + l$ элементарных событий. По классическому определению вероятности имеем

$$P(A) = \frac{k}{n};\ P(B) = \frac{l}{n};\ P(A + B) = \frac{k + l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Совершенно так же теорема 1 формулируется и доказывается для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

С л е д с т в и е. *Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице*:

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$. (2)

Так как события A и $\overline{A}$ несовместимы, то по доказанной теореме 1 имеем

$P(A) + P(\overline{A}) = P(A + \overline{A})$.

Событие $A + \overline{A}$ — есть достоверное событие (ибо одно из событий A или $\overline{A}$ произойдет). Поэтому $P(A + \overline{A}) = 1$, что и приводит к искомому соотношению (2).

П р и м е р 21. При стрельбе в мишень вероятность выбить десять очков равна 0,2, а вероятность выбить девять очков равна 0,5. Чему равна вероятность выбить не менее девяти очков?

Р е ш е н и е. Пусть случайное событие A означает «выбить десять очков», B — «выбить девять очков» и $A + B$ — «выбить не менее девяти очков». Так как случайные события A и B несовместимы, то по доказанной выше теореме

$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$.

О п р е д е л е н и е 19. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события A и B называют *зависимыми.*

Пример 22. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Если событие A — вынут белый шар, то $P(A) = \frac{1}{2}$. После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие B — во втором испытании вынут белый шар — также имеет вероятность $P(A) = \frac{1}{2}$, т. е. события A и B независимые.

Предположим, что вынутый в первом испытании шар не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие A, т. е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается $\left(P(B) = \frac{1}{3}\right)$; если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события B увеличивается $\left(P(B) = \frac{2}{3}\right)$. Итак, вероятность события B существенно зависит от того, произошло или не произошло событие A; в таких случаях события A и B зависимые.

Определение 20. Пусть A и B — зависимые события. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ события B называется вероятность события B, найденная в предположении, что событие A уже наступило.

Так, в примере 22 $P_A(B) = \frac{1}{3}$.

Заметим, что если события A и B независимы, то $P_A(B) = P(B)$.

Теорема 2. *Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило*:

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а значит, и событию AB. Тогда

$$P(AB) = \frac{l}{n} = \frac{k}{n} \cdot \frac{l}{k} = P(A)P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (3).

Замечание. Аналогичным образом получим $P(BA) = P(B)P_B(A)$. Так как $AB = BA$, то

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A). \quad (4)$$

П р и м е р 23. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимаются подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Р е ш е н и е. Обозначим: C — появление двух белых шаров. Случайное событие C представляет собой произведение двух событий: $C = AB$, где A — появление белого шара при первом вынимании, B — появление белого шара при втором вынимании. По теореме умножения вероятностей зависимых случайных событий получим

$$P(C) = P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}.$$

Т е о р е м а 3. *Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий*:

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (5)$$

Действительно, если A и B — независимые события, то формула (3) превращается в формулу (5).

П р и м е р 24. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают два шара, но после первого вынимания шар возвращается в урну, и шары в урне перемешиваются. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Р е ш е н и е. Обозначим: C — появление двух белых шаров. Случайное событие C представляет собой произведение двух событий: $C = AB$, где A — появление белого шара при первом вынимании, B — появление белого шара при втором вынимании. По теореме умножения вероятностей для независимых случайных событий получаем: $P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$.

Т е о р е м а 4. *Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l — событию B и m — одновременно событиям A и B. Отсюда событию $A + B$ благоприятствуют $k + l - m$ элементарных событий.

Тогда $P(A+B) = \frac{k+l-m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Замечание 1. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB — невозможное событие и, следовательно, $P(AB) = 0$ и

$P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Пример 25. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $P(A) = 0{,}9$ и $P(B) = 0{,}7$. Найти вероятность попадания при залпе из обоих орудий хотя бы одним из орудий.

Очевидно, события A и B совместимы и независимы. Поэтому $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}9 + 0{,}7 - 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}97$.

3. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании равна p, тогда вероятность ненаступления A равна $q = 1 - p$.

Найдем вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз ($m \leqslant n$).

Пусть событие A наступило в первых m испытаниях m раз и не наступило во всех последующих испытаниях. Это сложное событие можно записать в виде произведения

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{\overline{A}\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m \text{ раз}}.$$

Общее число сложных событий, в которых A наступает m раз, равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. При этом вероятность каждого сложного события: $p^m q^{n-m}$. Так как эти сложные события являются несовместимыми, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей.

Итак, если $P_n(m)$ есть вероятность появления события A m раз в n испытаниях, то

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Эта формула называется *формулой Бернулли.*

П р и м е р 26. Пусть всхожесть семян некоторого растения составляет 90%. Найдем вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

Р е ш е н и е. а) В данном случае $p = 0,9$; $q = 1 - p = 0,1$; $n = 4$; $m = 3$. Применяя формулу Бернулли, получим

$P_4(3) = 4 \cdot (0,9)^3 \cdot 0,1 = 0,2916$.

б) Искомое событие A состоит в том, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. По теореме сложения вероятностей: $P(A) = P_4(3) + P_4(4)$.

Но $P_4(4) = (0,9)^4 = 0,6561$.

Поэтому $P(A) = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477$.

Дальнейшее знакомство с наукой о случайном можно продолжить, например, по книге [80].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. Г.* Михаил Васильевич Остроградский. Биография. — Юрьев, 1902.
2. *Архимед.* Сочинения / Пер., вступительная статья и коммент. И. Н. Веселовского. Пер. арабских текстов Б. А. Розенфельд. — М.: Физматгиз, 1962.
3. *Баврин И. И.* Сельский учитель С. А. Рачинский и его задачи для умственного счета. — М.: Физматлит, 2003.
4. *Башмакова И. Г.*, *Лапин А. И.* Пифагор // Квант, 1986. — № 1. — С. 7—12.
5. *Беве Л.* Мини-геометрия // Квант. — 1976. — № 6. — С. 2—12.
6. *Белл Э. Т.* Творцы математики: Предшественники современной математики. Пособие для учителей / Пер. с англ. В. Н. Тростникова, С. Н. Киро, Н. С. Киро; Под ред. и с доп. С. Н. Киро. — М.: Просвещение, 1979.
7. *Белый Ю. А.* Иоганн Кеплер. — М.: Наука, 1971.
8. *Белый Ю. А.* Иоганн Мюллер (Региомонтан). — М.: Наука, 1985.
9. *Белькинд Л. Д.* А. М. Ампер. 1775—1836. — М., 1968.
10. *Бендукидзе А. Д.* Золотое сечение // Квант. — 1973. — № 8. — С. 22—27, 34, 53.
11. *Бендукидзе А. Д.* Фигурные числа // Квант. — 1974. — № 6. — С. 53—56.
12. *Березин В. Н.* Луночки Гиппократа // Квант. — 1971. — № 5. — С. 17—21, 61.
13. *Березкина Э. И.* Математика Древнего Китая. — М.: Наука, 1980.
14. *Берман Г. Н.* Число и наука о нем. Изд. 3-е. — М.: Физматгиз, 1960.
15. Беседа с А. Н. Колмогоровым // Квант. — 1983. — № 4.
16. *Бюлер В.* Гаусс. Биографическое исследование / Пер. с англ. — М.: Наука, 1989.
17. *Вавилов С. И.* Исаак Ньютон. 1643—1727. — 4-е изд., доп. — М.: Наука, 1989.
18. *Вейерштрасс К. Т. В.* Письма Карла Вейерштрасса к Софье Ковалевской, 1871—1891 / Под ред. П. Я. Кочиной. — М.: Наука, 1973.
19. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. — 2-е. изд. — М.: Наука, 1966.

20. *Виленкин Н. Я.* В таинственном мире бесконечных рядов // Квант. – 1989. – № 10. – С. 21–27.
21. *Винер Н.* Я – математик. – 2-е изд. – М.: Наука, 1967.
22. *Володарский А. И.* Ариабхата. – М.: Наука, 1977.
23. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978.
24. *Воронин С. М., Кулагин А. Г.* О задаче Пифагора // Квант. – 1987. – № 1. – С. 11–14, 28.
25. *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Лаплас. – М.: Наука, 1985.
26. *Гарднер М.* Числа Каталана // Квант. – 1979. – № 7. – С. 20–26.
27. *Геллер Б., Брук Ю.* Симеон Дени Пуассон // Квант. – 1982. – № 2. – С. 14–20.
28. *Гик Е. Я.* Шахматы и математика. – М.: Наука, 1983.
29. *Гиндикин С.* Пьер-Симон Лаплас // Квант. – 1977. – № 12. – С. 12–21.
30. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. Пособие для учителей: IV–VI кл. – М.: Просвещение, 1981.
31. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. Пособие для учителей: VII–VIII кл. – М.: Просвещение, 1982.
32. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. Пособие для учителей: IX–X кл. – М.: Просвещение, 1983.
33. *Гнеденко Б. В.* Из истории науки о случайном (Из истории математических идей). – М.: Знание, 1981.
34. *Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б.* Михаил Васильевич Остроградский. 1801–1862. Жизнь и работа. Научное и педагогическое наследие. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
35. *Гнеденко Б. В., Марон И. А.* Научная и педагогическая деятельность М. В. Остроградского. В кн.: М. В. Остроградский. Избранные труды. – М.: Физматгиз, 1958.
36. *Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д.* Даниил Бернулли (1700–1782). – М.: Наука, 1981.
37. *Гуревич Е. Я.* Тайна древнего талисмана. – М.: Наука, 1969.
38. *Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.* Джироламо Кардано. – М.: Знание, 1980.
39. *Гутер Р. С., Полунов Ю. Л.* Джон Непер (1650–1617). – М.: Наука, 1980.
40. *Гюнтер Н. М.* О педагогической деятельности А. А. Маркова // Известия Российской Академии наук, 1923. – Т. 17. – № 1–18.
41. *Данилов Ю.* Стомахион // Квант. – 1978. – № 8. – С. 50–63.

42. *Дейвис Ф. Дж.* Арифметика. В кн.: Математика в современном мире / Пер. с англ. Н. Г. Рычковой; Предисловие В. А. Успенского. – М.: Мир, 1967.
43. *Демьянов В. П.* Рыцарь точного знания. – М.: Знание, 1991.
44. *Денисов А. П.* Леонтий Филиппович Магницкий. 1669–1739. – М.: Просвещение, 1967.
45. *Депман И. Я.* Занимательная страница. О маленьких слабостях // Математика в школе, 1968. – № 1. – С. 77.
46. *Депман И. Я.* История арифметики. Пособие для учителей. – М.: Учпедгиз, 1959.
47. *Добровольский В. А.* Даламбер. – М.: Знание, 1968.
48. *Долбилин Н. П.* Пик Делоне // Квант. – 1986. – № 3. – С. 10–16.
49. *Дьедонне Ж.* Дело Никола Бурбаки. – М.: Знание, 1973.
50. *Дьедонне Ж.* О деятельности Бурбаки // Успехи математических наук, 1973. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 205–216.
51. *Дюрер А.* Дневники, письма, трактаты / Пер. с ранненоноверхненемецкого и коммент. Ц. Г. Нессельштраус. – Т. 11. – М.; Л.: Искусство, 1957.
52. *Ефремов А. В.* О математике и математиках. – Казань: Магариф, 2001.
53. Жизнь Науки. Антология вступлений к классике естествознания. Составитель и автор биографических очерков профессор С. П. Капица. – М.: Наука, 1973.
54. *Зенкевич И. Г.* Не интегралом единым. – Тула: Приок. кн. изд., 1971.
55. *Зенкевич И. Г.* Судьба таланта (Очерки о женщинах-математиках). – Брянск, 1968.
56. *Зубов В. П.* Леонардо да Винчи. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962.
57. «Квант улыбается» // Квант. – 1987. – № 2. – С. 18.
58. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2 т. – Т. I / Пер. с нем.; Под ред. М. М. Постникова. – М.: Наука, 1989.
59. *Кляус Е. М.* и др. Паскаль. 1623–1662. – М.: Наука, 1971.
60. *Ковалевская С. В.* Воспоминания и письма / Отв. ред. М. В. Нечкина; Коммент. С. Я. Штрайха. – 2-е изд. – М.: Изд-во АН СССР, 1961.
61. *Ковалевская С. В.* Научные работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948.

62. *Колесников М. С.* Лобачевский. — М.: Молодая гвардия, 1965.
63. Кому что понятно // Квант. — 1970. — № 3. — С. 23.
64. *Кочина П. Я.* Воспоминания. — М.: Наука, 1974.
65. *Кочина П. Я.* Карл Вейерштрасс. — М.: Наука, 1985.
66. *Крамер Г.* Полвека с теорией вероятностей: наброски воспоминаний. Современные проблемы математики / Пер. с англ. — М.: Знание, 1979.
67. *Крылов А. Н.* Мои воспоминания. — М.: Изд-во АН СССР, 1945.
68. *Кузьмин Е., Ширшов А.* О числе *e* // Квант. — 1979. — № 8. — С. 3–8.
69. *Курляндчик Л., Лисицкий А.* Суммы и произведения // Квант. — 1978. — № 10. — С. 31–37, 94.
70. *Кыпман Ф.* История числа π. — М.: Наука, 1971.
71. *Лаптев Б. Л., Юшкевич А. П.* И. Г. Ламберт (К 250-летию со дня рождения) // Математика в школе. — 1979. — № 5. — С. 69–72.
72. *Леман И.* Увлекательная математика / Пер. с нем. — М.: Знание, 1985.
73. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь / Пер. с англ. В. И. Левина. — 4-е изд., стереотипное. — М.: Наука, 1978.
74. *Литцман В.* Веселое и занимательное о числах и фигурах / Пер. с нем. и ред. И. В. Погребысского. — М.: Физматгиз, 1963.
75. *Макинтош А. Р.* Компьютер Атанасова / В мире науки. — 1988. — № 10. — С. 70–77.
76. *Матвиевская Г. П.* Альбрехт Дюрер — ученый. — М.: Наука, 1987.
77. *Матвиевская Г. П.* Рене Декарт (1596–1650). — М.: Наука, 1976.
78. Мирное завершение старого спора // В мире науки. — 1990. — № 11. — С. 126–127.
79. *Мищенко А. С., Соловьев Ю. П.* Кватернионы // Квант. — 1983. — № 9. — С. 10–15.
80. *Мостеллер Ф.* и др. Вероятность / Пер. с англ. В. В. Фирсова; Под ред. И. М. Яглома. — М.: Мир, 1969.
81. *Мостеллер Ф.* Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Пер. с англ.; Под ред. Ю. В. Линника. — 3-е изд. — М.: Наука, 1985.
82. *Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М.* Очерк о цепных дробях // Квант. — 1983. — № 5. — С. 16–20; № 6. — С. 26–30.

83. *Никифоровский В. А.* Великие математики Бернулли. — М.: Наука, 1984.
84. *Олехник С. Н.* и др. Старинные занимательные задачи. — М.: Наука, 1985.
85. *Оре О.* Приглашение в теорию чисел. — М.: Наука, 1980.
86. *Паскаль Б.* Мысли Ф. де Ларошфуко. Максимы. — М.: Художественная литература, 1974.
87. *Пекелис В.* Кибернетическая смесь. — 3-е изд. — М.: Знание, 1982.
88. Переписка С. В. Ковалевской и Г. Митгаг-Леффлера / Научное наследство. — Т. 7. — М.: Наука, 1984.
89. Письма С. В. Ковалевской от иностранных математиков / Публ. П. Я. Кочиной. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, № 121. — М., 1979.
90. *Погребысский И. Б.* Готфрид Вильгельм Лейбниц. 1646–1716. — М.: Наука, 1971.
91. *Пойя Д.* Математика и правдоподобные рассуждения / Пер. с англ. — 2-е изд., испр. — М.: Наука, 1975.
92. *Пойя Д.* Мои знакомые математики // Наука и жизнь. — 1970. — № 6. — С. 48–51.
93. *Полубаринова-Кочина П. Я.* К биографии С. В. Ковалевской (по материалам ее переписки) // Историко-математические исследования. Вып. VII. — М.: ГИТТЛ, 1954. — С. 666–712.
94. *Постников М. М.* Теорема Ферма. — М.: Наука, 1978.
95. *Прудников В. Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1956.
96. *Реньи А.* Письма о вероятности / Пер. с венгер.; под ред. В. В. Гнеденко. — М.: Мир, 1970.
97. *Рид К.* Гильберт / Пер. с англ. И. В. Долгачева; Под ред. Р. В. Гамкрелидзе. — М.: Наука, 1977.
98. *Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П.* Омар Хайям. — М.: Наука, 1965.
99. *Симонов Р. А.* Математическая мысль Древней Руси. — М.: Наука, 1977.
100. *Сираджинов С. Х., Матвиевская Г. Л.* Абу Райхан Бируни и его математические труды. — М.: Просвещение, 1978.
101. *Сираджинов С. Х., Матвиевская Г. П.* Ал-Хорезми — выдающийся математик и астроном Средневековья. — М.: Просвещение, 1983.
102. Случай с Дедекиндом // Квант. — 1970. — № 6. — С. 25.

103. *Соловьев Ю. П.* Вызов Ван Роумена // Квант. — 1986. — № 6. — С. 18—20.
104. *Соминский И. С.* Метод математической индукции. — 7-е изд. — М.: Наука, 1986.
105. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. и доп. И. Б. Погребысского. — 5-е изд. — М.: Наука, 1990.
106. *Тихомиров В. М.* Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука, 1986.
107. Физики продолжают шутить. Сборник переводов / Под общ. ред. В. Турчина. — М.: Мир, 1968.
108. Физики шутят. — М.: Мир, 1966.
109. *Филиппов М. М.* Лейбниц, его жизнь и деятельность: общественная, научная и философская. — СПб., 1893.
110. *Франкфурт У. М., Френк А. М.* Христиан Гюйгенс. — М.: Наука, 1962.
111. *Фрейман Л. С.* Творцы высшей математики. — М.: Наука, 1968.
112. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкеви- ча. — М.: Просвещение, 1975, 1976.
113. *Чистяков В. Д.* Рассказы о математиках. — 2-е изд., испр. и доп. — Минск: Вышэйш. шк., 1966.
114. *Чистяков В. Д.* Старинные задачи по элементарной математике. — Минск: Вышэйш. шк., 1978.
115. *Шмутцер Э., Шютц В.* Галилео Галилей / Пер. с нем. Н. В. Мицкевича; Под ред. Г. М. Идлиса. — М.: Мир, 1987.
116. *Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф.* От проективной геометрии — к неевклидовой (вокруг абсолюта). — М.: Просвещение, 1979.
117. *Юшкевич А. П., Копелевич Ю. Х.* Христиан Гольдбах. 1690—1764. — М.: Наука, 1983.
118. *Яглом И. М.* Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики // Квант. — 1984. — № 7. — С. 15—17.
119. *Яковлев А. Я.* Леонард Эйлер. — М.: Просвещение, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Баврин Иван Иванович

СБОРНИК ЗАДАЧ И ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

5–9 классы

Лицензия ИД № 03185 от 10.11.2000.
Сертификат соответствия
№ РОСС RU.AE51.H 15816 от 17.10.2011.
Подписано в печать 23.10.2012. Формат 60×88/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 14,7.
Тираж 3 000 экз. (1-й завод 1–500 экз.).
Заказ №

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС.
119571, Москва, а/я 19.
Тел./факс: (495) 984-40-21, 984-40-22.
E-mail: vlados@dol.ru
http://www.vlados.ru

ООО «Великолукская городская типография».
182100, Псковская обл., г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12.
Тел./факс (811-53) 3-62-95.
E-mail: zakaz@veltip.ru

Библиотека учителя математики

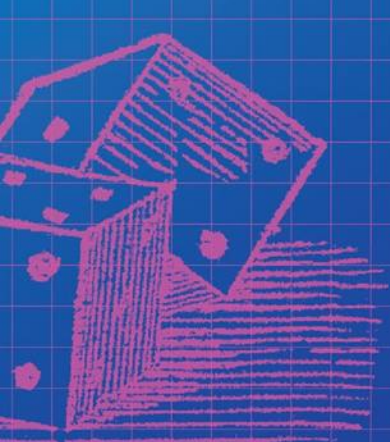
И.И. Баврин

СБОРНИК ЗАДАЧ и занимательных упражнений по МАТЕМАТИКЕ

5-9 классы

В сборник включена богатая коллекция старинных занимательных задач, начиная с устного счета и заканчивая задачами науки о случайном.

В книгу включены исторические комментарии к текстам ряда задач, а также забавные истории из жизни известных ученых — авторов приведенных задач.



ISBN 978-5-691-01906-7

9 785691 019067

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС